2次曲線が接するための条件と $kf(x, y)+(px+qy+r)^2=0$ が表す曲線群

稲田(いなだ)　富美男(とみお)

§1. はじめに

たとえば放物線 $y=f(x)=x^2-2x+1$ と直線 $y=g(x)=2x-3$ は点 $(2, 1)$ で接している。このとき差をとってできる関数は $f(x)-g(x)=(x-2)^2$ と変形できる(〔1〕参照)。2次曲線の方程式の場合はこのような変形ができるのか。円 $x^2+y^2-1=0$ と円 $(x-2)^2+y^2-1=0$ は点 $(1, 0)$ で接するが，その差をとると1次方程式(接線)になる。しかし和をとると

$$x^2+y^2-1+(x-2)^2+y^2-1=2(x-1)^2+2y^2$$

と変形できる。このことを一般化して定理1を得る。

2次曲線 $f(x, y)=0$ と直線 $px+qy+r=0$ が共有点をもつとき，定数 k について，方程式

$$kf(x, y)+(px+qy+r)=0$$

は，その共有点を通る2次曲線を表す。では

$$kf(x, y)+(px+qy+r)^2=0$$

はどうか。グラフソフトで試してみると，曲線 $f(x, y)=0$ と直線 $px+qy+r=0$ の共有点で $f(x, y)=0$ と**接する**2次曲線が描かれる。ここでは，次の定理1を用いた証明と接線の問題への応用を考えてみる。

§2.　2次曲線が接するための条件

定理で扱う2次曲線は楕円や双曲線などで，点や $(ax+by+c)^2=0$ の直線は除く。2直線の場合も含むが $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ は交点でないとする。$f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$ の一方だけ(1次の)直線でもよい。

> **定理1**　点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を共有する2つの2次曲線 $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$ が点Pで接するための必要十分条件は，ある定数 $k\neq 0$ が存在して
>
> $$f(x, y)-kg(x, y)$$
> $$=A(x-x_0)^2+B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2 \quad \cdots\cdots①$$
>
> と変形できることである。ここで A, B, C は定数である。

証明　方程式

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \quad \cdots\cdots②$$

を陰関数と見て両辺を x で微分すると

$$2ax+2by+2bx\frac{dy}{dx}+2cy\frac{dy}{dx}+2d+2e\frac{dy}{dx}=0$$

$$(bx+cy+e)\frac{dy}{dx}+ax+by+d=0 \quad \cdots\cdots③$$

となる。

$f(x, y)=a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2+2d_1x+2e_1y+f_1=0$
$g(x, y)=a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2+2d_2x+2e_2y+f_2=0$

とおく。$f(x, y)=0$ と $g(x, y)=0$ が点Pで接するためには $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ において，接線の傾きが一致するか，接線がともに直線 $x=x_0$ であればよい。

$\boxed{1}$　$b_1x_0+c_1y_0+e_1\neq 0$ かつ $b_2x_0+c_2y_0+e_2\neq 0$ のとき

③より

$$-\frac{a_1x_0+b_1y_0+d_1}{b_1x_0+c_1y_0+e_1}=-\frac{a_2x_0+b_2y_0+d_2}{b_2x_0+c_2y_0+e_2}$$

であれば傾きが一致する。すなわち，定数 $k\neq 0$ が存在して

$$a_1x_0+b_1y_0+d_1=k(a_2x_0+b_2y_0+d_2)$$
$$b_1x_0+c_1y_0+e_1=k(b_2x_0+c_2y_0+e_2) \quad \cdots\cdots④$$

であればよい。

$$f(x,\ y)-kg(x,\ y)$$
$$=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$$
とおく。ここで
$A=a_1-ka_2,\ B=b_1-kb_2,\ \cdots\cdots,\ F=f_1-kf_2$
とおいた。一方 $x,\ y$ についての恒等式
$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$$
$$=A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2$$
$$+2(Ax_0+By_0+D)(x-x_0)+2(Bx_0+Cy_0+E)(y-y_0)$$
$$+Ax_0{}^2+2Bx_0y_0+Cy_0{}^2+2Dx_0+2Ey_0+F \quad \cdots\cdots⑤$$
が成り立つ。この場合 $f(x,\ y)=0,\ g(x,\ y)=0$ はともに $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を通るから
$$f(x_0,\ y_0)-kg(x_0,\ y_0)=0$$
よって
$$Ax_0{}^2+2Bx_0y_0+Cy_0{}^2+2Dx_0+2Ey_0+F=0$$
また
$$Ax_0+By_0+D=a_1x_0+b_1y_0+d_1-k(a_2x_0+b_2y_0+d_2)$$
$$Bx_0+Cy_0+E=b_1x_0+c_1y_0+e_1-k(b_2x_0+c_2y_0+e_2) \quad \cdots\cdots⑥$$
より接線の傾きが一致するとき，④より⑥は 0 になり①が成り立つ。逆に①のとき，⑥は 0 であるから④が成り立ち，接線の傾きが等しくなるので 2 次曲線は点 P で接する。

$\boxed{2}$　$b_1x_0+c_1y_0+e_1=0$ かつ $a_1x_0+b_1y_0+d_1\neq0$ のとき

②を y について微分し整理すると
$$(ax+by+d)\frac{dx}{dy}+bx+cy+e=0$$
であるから，$f(x,\ y)=0$ の点 P における接線は直線 $x=x_0$ である。よって $g(x,\ y)=0$ と接するとき
$b_2x_0+c_2y_0+e_2=0$ かつ
$a_1x_0+b_1y_0+d_1=k(a_2x_0+b_2y_0+d_2)$ となる定数
$k\neq0$ が存在する。このとき⑥の式の値は 0 となり①への変形ができる。逆に⑥が 0 のとき，
$b_2x_0+c_2y_0+e_2=0$ かつ
$a_1x_0+b_1y_0+d_1=k(a_2x_0+b_2y_0+d_2)$ となり，$x=x_0$ を共通接線にもつ。

$\boxed{3}$　「$b_1x_0+c_1y_0+e_1=0$ かつ $a_1x_0+b_1y_0+d_1=0$」または「$b_2x_0+c_2y_0+e_2=0$ かつ $a_2x_0+b_2y_0+d_2=0$」のとき

$f(x,\ y)=0,\ g(x,\ y)=0$ がどのような曲線か調べる。

$$f(x,\ y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$
に対して
$$D=b^2-ac,\ D_x(x,\ y)=ax+by+d,$$
$$D_y(x,\ y)=bx+cy+e$$
とおく。恒等式⑤を $A\to a$，$B\to b$，……，$F\to f$ として条件 $D_x(x_0,\ y_0)=0,\ D_y(x_0,\ y_0)=0$ をあてはめると次の式になる。
$$f(x,\ y)=a(x-x_0)^2+2b(x-x_0)(y-y_0)+c(y-y_0)^2$$
(1)　$a\neq0$ のとき

(ア)　$D>0$ の場合　2 次方程式 $at^2+2bt+c=0$ の実数解 $\alpha,\ \beta$ によって
$$f(x,\ y)$$
$$=a\{(x-x_0)-\alpha(y-y_0)\}\{(x-x_0)-\beta(y-y_0)\}=0$$
と表されるから $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ で交わる 2 直線になる。

(イ)　$D=0$ の場合　(ア)において $\alpha=\beta$ より $f(x,\ y)=a\{(x-x_0)-\alpha(y-y_0)\}^2=0$ は 1 直線である。

(ウ)　$D<0$ の場合　点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ である。

(2)　$c\neq0$ のとき y についての 2 次方程式とみると同じ結果になる。

(3)　$a=c=0,\ b\neq0$ のとき $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ で交わる 2 直線になるがこのとき $D=b^2>0$ である。

いずれの場合もこの定理では扱わない。

注意 1　$f(x,\ y)=0$ または $g(x,\ y)=0$ が $(ax+by+c)^2=0$ のとき接していても①に変形できないことがある。

例 0　直線 $y^2=0$ と放物線 $2y=x^2$ は原点で接するが
$$y^2-k(2y-x^2)=kx^2+(y-k)^2-k^2$$
は $k\neq0$ ならどんな k についても①の形に変形できない。

$\boxed{3}$の副産物として次を得る。

補題　$f(x,\ y)=0$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ において，$D>0$ かつ，$D_x(x_0,\ y_0)=0,\ D_y(x_0,\ y_0)=0$ となるとき $f(x,\ y)=0$ は $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を交点とする 2 直線である。

例 1　円 $x^2+y^2=2$ と双曲線 $xy-1=0$ は点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ を共有し，$k=2$ として
$$x^2+y^2-2-2(xy-1)$$
$$=(x-1)^2-2(x-1)(y-1)+(y-1)^2$$
と変形できることより，$\mathrm{P}(1,\ 1)$ で接する。

例 2　2 次曲線

$f(x,\ y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$

上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は，次の式で与えられる。

$$g(x,\ y)=ax_0x+b(x_0x+y_0y)+cy_0y +d(x+x_0)+e(y+y_0)+f=0$$

証明　$f(x,\ y)-2g(x,\ y)$

$$\begin{aligned}&=ax^2-2ax_0x+2bxy-2b(x_0x+y_0y)\\&\quad+cy^2-2cy_0y+2dx-2d(x+x_0)+2ey\\&\quad-2e(y+y_0)-f\\&=a(x-x_0)^2+2b(x-x_0)(y-y_0)+c(y-y_0)^2\\&\quad+f(x_0,\ y_0)\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ は $f(x,\ y)=0$ 上の点であるから

$f(x_0,\ y_0)=0$

定理より $f(x,\ y)=0$ と $g(x,\ y)=0$ は点Pで接する。

注意 2　定数 k の値は④を用いて求められるが，実際には結果を予想し係数を比較して求めた。

§3. $kf(x,\ y)+(px+qy+r)^2=0$ が表す曲線群

> **定理 2**　2 次曲線 $f(x,\ y)=0$ と直線 $px+qy+r=0$ が共有点をもつとき，定数 $k\neq0$ について方程式
>
> $$g(x,\ y)=kf(x,\ y)+(px+qy+r)^2=0$$
>
> は，その共有点で $f(x,\ y)=0$ に接する 2 次曲線(2 直線等も含む)を表す。

証明　共有点の座標を $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ とおく。

$f(x_0,\ y_0)=0$ と $px_0+qy_0+r=0$ より

$g(x_0,\ y_0)=0$ であるから，曲線 $g(x,\ y)=0$ は $f(x,\ y)=0$ と直線 $px+qy+r=0$ の共有点を通る。

$$f(x,\ y)-\frac{1}{k}g(x,\ y)=-\frac{1}{k}(px+qy+r)^2$$

$$=-\frac{1}{k}\{p(x-x_0)+q(y-y_0)\}^2$$

$$=-\frac{p^2}{k}(x-x_0)^2-\frac{2pq}{k}(x-x_0)(y-y_0)-\frac{q^2}{k}(y-y_0)^2$$

したがって，定理 1 より $f(x,\ y)=0$ と $g(x,\ y)=0$ が点Pで接する。

> **例題 1**　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=y_0$ $(0<y_0<1)$ の共有点で接する放物線の方程式を求めよ。ただし軸が y 軸に平行な放物線のみ考える。

解　任意の定数 k について

$$k(x^2+y^2-1)+(y-y_0)^2=0$$

とおくと，円に接する 2 次曲線である。これが放物線を表すための条件は y^2 の係数が 0 になることであるから　$k=-1$

よって　$x^2+2y_0y-{y_0}^2-1=0$

$g(x,\ y)=0$ が 2 直線である場合は 2 本の接線を求める問題に対応している。例題 2 では平方完成を，例題 3 では補題を用いてみる。

> **例題 2**　放物線 $y=x^2-1$ と直線 $y=mx$ の交点で接する 2 直線について
>
> (1)　2 本の直線の方程式を求めよ。
>
> (2)　(1)の直線の交点の軌跡を求めよ。

解　(1)　定理 2 より定数 $k\neq0$ について求める方程式を

$$k(x^2-y-1)-(y-mx)^2=0 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

とおく。展開して整理すると，

$$(k-m^2)x^2+2mxy-y^2-ky-k=0 \qquad \cdots\cdots ⑧$$

この方程式が 1 点で交わる 2 直線を表すように定数 $k\neq0$ を定める。$k=m^2$ のとき $m=0$ 以外では因数分解できない。$k\neq m^2$ として⑧の両辺に $k-m^2$ を掛けて平方完成を 2 回行うと

$$\{(k-m^2)x+my\}^2-k\left(y+\frac{k-m^2}{2}\right)^2 +\frac{k}{4}(k-m^2)(k-m^2-4)=0 \qquad \cdots\cdots ⑨$$

となる。この方程式が 1 点で交わる 2 直線を表すのは

$$k>0 \text{ かつ } k(k-m^2)(k-m^2-4)=0$$

のときであるから，$k=m^2+4$ である。このとき⑨は

$$(4x+my)^2-(m^2+4)(y+2)^2=0$$

であるから，求める 2 直線の方程式は

$$4x+my-\sqrt{m^2+4}(y+2)=0,$$

$$4x+my+\sqrt{m^2+4}(y+2)=0$$

(2) 交点の座標は $4x+my=0$ かつ $y+2=0$ を解いて得られる。よって $\left(-\frac{m}{4},\ -2\right)$

この点は直線 $y=-2$ 上にある。逆にこの直線上の点は定数 m を用いてこのように表せる。交点の軌跡は直線 $y=-2$ である。

> **例題 3** 円 $x^2+y^2=r^2$ の外部の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から円に引いた接線の方程式は
> $$(p^2+q^2-r^2)(x^2+y^2-r^2)-(px+qy-r^2)^2=0 \quad \cdots\cdots ⑩$$
> であることを示せ。(〔2〕)

解 Pから円に引いた2本の接線の2個の接点をA，Bとする。A，Bを通る直線は極線と呼ばれ

$$px+qy-r^2=0$$

で与えられる。定理2より⑩はA，Bで円に接する2次曲線であり，明らかに点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通る。補題を用いて⑩がPで交わる2直線であることを示す。

⑩より

$$(q^2-r^2)x^2-2pqxy+(p^2-r^2)y^2$$
$$+2pr^2x+2qr^2y-(p^2+q^2)r^2=0$$

よって

$$D=(pq)^2-(p^2-r^2)(q^2-r^2)$$
$$=(p^2+q^2-r^2)r^2$$

Pは円の外部の点より $p^2+q^2-r^2>0$

すなわち　$D>0$

$$D_x(p,\ q)=(q^2-r^2)p-pq^2+pr^2=0$$
$$D_y(p,\ q)=-p^2q+(p^2-r^2)q+qr^2=0$$

補題から⑩はPで交わる2直線である。

§4. おわりに

2つの定理はともに発見的な方法で得ており，定理の形が決まるまで楽しかった。

定理が実際の入試問題で使えるのかと言われると前提となる予備知識が多いので難しい。しかしこういう見方もあるのだということは数学の幅を広げてくれると思う。

《参考文献》

〔1〕 片岡宏信 「グラフについて考える」
数研通信 No.76

〔2〕 片岡宏信 「2次曲線の接線について(Ⅱ)」
数研通信 No.69

(元 兵庫県立加古川南高校)