双対の原理により双対な定理を探す

礒部（いそべ）　一哉（かずや）

§1. 双対の原理

射影幾何学に「双対の原理」というものがあり，２次元において双対要素である点と直線を入れ換えても，ある定理が真ならばその双対も真であるといいます。点と直線を入れ替えることを「相反変換」と呼び，この変換によりある定理に対して双対な定理を探してみました。有名なのは「パスカルの定理」と「ブリアンションの定理」です。以下に今回分かった双対な対応関係を紹介します。それぞれの定理は既知のものですが，それらの組が双対な関係であるということも既知のものであれば，教えていただきたいと思います。

定義：相反変換 f ⇔ 点 A を直線 a にする変換

$f^{-1}=f$

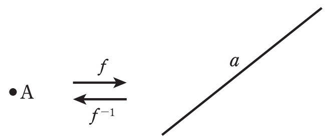

図１

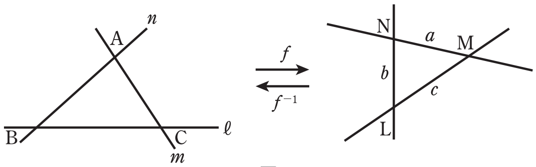

図２

図１は $f(A)=a$，$f^{-1}(a)=A$ であり，図２は $f(B)=b$，$f(C)=c$，$f(l)=L$，$f(m)=M$，$f(n)=N$ ということです。便宜上，対応するものを同じアルファベットで表し，大文字を点，小文字を直線としています。ここで，「２点の中点 ⇔ ２直線の二等分線」と対応します。

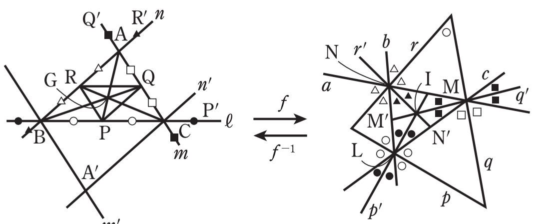

図３

図３に対応関係を分かりやすく同じマークで表します。（P′ は線分 BC を１：１に外分した無限遠点です。）

中線である AP は a，p（外角の二等分線と対辺）の交点を表すので，三角形の中線が１点で交わるということと，外角の二等分線と対辺の３つの交点は一直線上にあるということが双対な関係ということになります。

> **定理**
> 三角形の３本の中線は共点。（重心）
> **双対定理**
> 三角形の外角の二等分線と対辺の３つの交点は共線。

§2. ジェルゴンヌの定理の双対

次にジェルゴンヌ点の相反変換を考えます。

ジェルゴンヌの定理：

△ABC の内接円と △ABC の接点を各頂点と結んだ線は１点で交わる。
（ジェルゴンヌ点，図４左，点G）

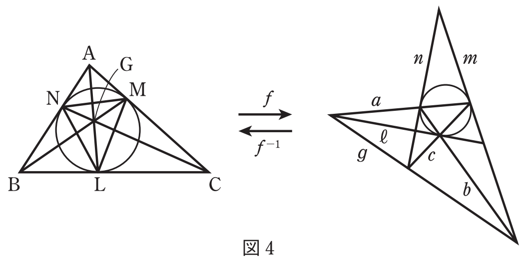

図４

図４からジェルゴンヌの定理の双対がすぐに分かります。

ジェルゴンヌの定理の双対定理：

図４左図の MN と BC，ML と AB，NL と AC の延長の交点は共線である。

この直線はジェルゴンヌ点の相反変換であるので「ジェルゴンヌ線」（図４右 g）と名付けましょう。

もし，図４左図の中にジェルゴンヌ線を引いた場合，ジェルゴンヌ点の内接円に関する極線がジェルゴンヌ線になります。

定理

三角形の内接円との接点と向かい合う頂点を結んだ３本の直線は共点。（ジェルゴンヌ点）

双対定理

三角形と内接円の接点どうしを結んだ３本の直線と向かい合う辺との３つの交点は共線。

このように，ある特徴的な「点」があれば，その双対となる「直線」を考えてみます。外心，内心，垂心のような有名な点の双対も考えました。これらは無限遠直線になるようです。（同じ平面の中では見ることができません。よって，オイラー線の双対「オイラー点」も無限遠点になってしまい，見ることができませんでした。）

逆に，ある特徴的な「直線」があれば，その双対となる「点」を探します。「ニュートンの定理」というものがあり，「完全四角形の対角線の３つの中点は共線」というものですが，その線を「ニュートン線」と呼びます。双対を考えて「ニュートン点」というものも見つけました。このように，既知の定理から双対な定理を探すことは本当に面白いものです。

《参考文献》

〔１〕 初等幾何学　安藤清・佐藤敏明　共著　新数学入門シリーズ　一松信　編集　森北出版

〔２〕 初等射影幾何学入門　岩田至康　著　東京考え方研究社

〔３〕 不思議おもしろ幾何学辞典　D.ウェルズ　著　朝倉書店

（愛知県　至学館高等学校）