フィボナッチ多項式の一般項について

久末（ひさすえ）　正樹（まさき）

§1. フィボナッチ数列

フィボナッチ数列は

$$a_0=0,\ a_1=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n\geqq 0)$$

で定義される。具体的には 0，1，1，2，3，5，8，13，21，…… のように隣接している 2 項の和が次の項の数になっている。有名な事実として，パスカルの三角形の斜めの和にフィボナッチ数列が現れることが知られている。

```
0   1   1   2   3   5   8      ←斜めに足すとここに
1                              フィボナッチ数があら
1   1                          われる
1   2   1
1   3   3   1
1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
```

これを二項係数を用いて表すと，

$a_1=1={}_0\mathrm{C}_0$

$a_2=1={}_1\mathrm{C}_0$

$a_3=2={}_2\mathrm{C}_0+{}_1\mathrm{C}_1$

$a_4=3={}_3\mathrm{C}_0+{}_2\mathrm{C}_1$

$a_5=5={}_4\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_2$

$a_6=8={}_5\mathrm{C}_0+{}_4\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2$

となる。よって一般に次の公式が成り立つ。

$$\boxed{a_{n+1}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-k}\mathrm{C}_k\ (n\geqq 0)}\quad \cdots\cdots①$$

ただし，[　]はガウス記号である。

§2. フィボナッチ多項式

フィボナッチ数列を一般化したものにフィボナッチ多項式というものがある(〔3〕など参照)。次の漸化式を満たす多項式をフィボナッチ多項式という。

$$\boxed{f_0(x)=0,\ f_1(x)=1,\ f_{n+2}(x)=xf_{n+1}(x)+f_n(x)}$$

特に $x=1$ のときはフィボナッチ数列になる。

今回の目標は，フィボナッチ多項式について①と類似の公式をつくり，その公式を利用することによって〔1〕で得られた関係式を導き出すことである。

フィボナッチ多項式の母関数を

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)t^n \quad \cdots\cdots②$$

と定義すると，

$$g(t)=t+\sum_{n=0}^{\infty}f_{n+2}(x)t^{n+2}$$

$$xtg(t)=\sum_{n=0}^{\infty}xf_{n+1}(x)t^{n+2}$$

$$t^2g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)t^{n+2}$$

であるから，$\{f_n(x)\}$ の漸化式を適用すると

$$\begin{aligned}&g(t)-xtg(t)-t^2g(t)\\&=t+\sum_{n=0}^{\infty}\{f_{n+2}(x)-xf_{n+1}(x)-f_n(x)\}\\&=t\end{aligned}$$

が成り立つことから $g(t)=\dfrac{t}{1-xt-t^2}$ が得られる。

§3. フィボナッチ多項式の一般項

ここで，$\dfrac{1}{1-az+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ とおいて c_n を具体的に求めてみよう。

$|az-z^2|<1$ において

$$\frac{1}{1-az+z^2}=1+(az-z^2)+(az-z^2)^2+\cdots\cdots$$

であるから z^n の項が現れるのは

$$\begin{aligned}&(az-z^2)^{\left[\frac{n}{2}\right]}+(az-z^2)^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}+\cdots\cdots+(az-z^2)^n\\&=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(az-z^2)^{n-k}\end{aligned}$$

においてのみである。ここで

$$\begin{aligned}(az-z^2)^{n-k}&=z^{n-k}(a-z)^{n-k}\\&=z^{n-k}\sum_{j=0}^{n-k}{}_{n-k}\mathrm{C}_j a^{n-k-j}(-z)^j\\&=\sum_{j=0}^{n-k}{}_{n-k}\mathrm{C}_j a^{n-k-j}(-1)^j z^{n-k+j}\end{aligned}$$

となるから $j=k$ とすると，z^n の係数は

${}_{n-k}\mathrm{C}_k a^{n-2k}(-1)^k$ である。以上より

$$c_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-k}\mathrm{C}_k a^{n-2k}(-1)^k$$

となり，

$$\frac{1}{1-az+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-k}\mathrm{C}_k a^{n-2k}(-1)^k z^n \quad \cdots\cdots③$$

が得られる。ここで $z=it$，$a=\dfrac{x}{i}$ とおくと（ただし i は虚数単位），③は

$$\frac{1}{1-xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-k}\mathrm{C}_k\left(\frac{x}{i}\right)^{n-2k}(-1)^k(it)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-k}\mathrm{C}_k x^{n-2k}t^n$$

となるから

$$g(t)=\frac{t}{1-xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-k}\mathrm{C}_k x^{n-2k}t^{n+1}$$

よって，②より

$$\boxed{f_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-k}\mathrm{C}_k x^{n-2k}} \quad \cdots\cdots④$$

が成り立つ。よって，①の類似公式を得ることができた。

§4. 具体的な考察

$t^2-xt-1=0$ の解を $\alpha(x)$，$\beta(x)$ とすると

$$\alpha(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2},\ \beta(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$$

であるから，$f_{n+2}(x)-\alpha(x)f_{n+1}(x)=\beta(x)^{n+1}$，$f_{n+2}(x)-\beta(x)f_{n+1}(x)=\alpha(x)^{n+1}$ より

$$f_{n+1}(x)=\frac{\alpha(x)^{n+1}-\beta(x)^{n+1}}{\alpha(x)-\beta(x)} \quad \cdots\cdots⑤$$

が得られる。これはフィボナッチ数列の場合はビネの公式として知られている（1843 年）。

よって，④，⑤より，

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-k}\mathrm{C}_k x^{n-2k}=\frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{x^2+4}}}$$

を得る。ここで x をあらためて $x^{-\frac{1}{2}}$ とおいて整理すると，

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-k}\mathrm{C}_k x^k=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{1+4x}}}$$

$$\cdots\cdots⑥$$

となる。この式を利用して，〔1〕で藤岡優太先生が導いた結果を得ることができる。

④の右辺は $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n-k}\left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)^k$

であるから $x=2$ のときは $\dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}=2$，

$\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{2}=-1$ である。よって，このとき⑥は

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-k}\mathrm{C}_k 2^k=2^n+2^{n-1}\cdot(-1)$$

$$+\cdots\cdots+2\cdot(-1)^{n-1}+(-1)^n$$

となり，藤岡優太先生の結果が得られる。

《参考文献》

〔1〕 藤岡優太，$2^6-2^5+2^4-2^3+2^2-2^1+2^0$
$={}_6\mathrm{C}_0\cdot 2^0+{}_5\mathrm{C}_1\cdot 2^1+{}_4\mathrm{C}_2\cdot 2^2+{}_3\mathrm{C}_3\cdot 2^3$，
数研通信 91 号，pp29，2018 年

〔2〕 坂本茂，フィボナッチ数列の母関数，
数研通信 76 号，pp16～19，2013 年

〔3〕 Thomas Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Pure and applied mathematics, 2001 年

（北海道登別明日中等教育学校）