

等差数列・等比数列に潜む相加平均・相乗平均

なんば おさむ
難波 修

§1. はじめに

実力考査の問題作成の際に気づいた、三角形の重心と内心の特別な位置と辺の長さとの関係、そして授業教材作りの際に出くわした等差数列の性質から発展させた等比数列の性質について考察する。

§2. 三角形の重心と内心の位置関係

図形と計量や平面図形分野の問題作成をする際に、三角形の重心や内心に絡めた内容にすると何故か内心が内角の二等分線を2:1に内分している状況が起こる。その原因は、三角形の3辺の長さを持続する3つの整数にしていることである。

△ABCにおいて、重心をG、内心をIとし、
BC=a, CA=b, AB=c とする。
このとき $GI \parallel BC \iff a = \frac{b+c}{2}$

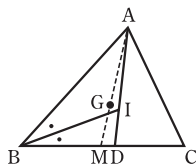
(証明)

AIの延長と辺BCとの交点をDとすると、ADは∠Aの二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = c : b$$

よって

$$BD = \frac{c}{c+b} BC = \frac{ca}{b+c}$$



また、BIは∠Bの二等分線であるから

$$AI : ID = BA : BD = c : \frac{ca}{b+c} = (b+c) : a \quad \dots\dots ①$$

次に、AGの延長と辺BCとの交点をMとすると、Gは△ABCの重心であるから

$$AG : GM = 2 : 1 \quad \dots\dots ②$$

したがって、①、②を用いて

$$\begin{aligned} GI \parallel BC &\iff AI : ID = AG : GM \\ &\iff (b+c) : a = 2 : 1 \\ &\iff a = \frac{b+c}{2} \quad \text{終} \end{aligned}$$

§3. 等差数列と相加平均

数列 $\{a_n\}$ に対して $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ とおく。

- (1) $\{a_n\}$ が等差数列ならば、 $\{b_n\}$ も等差数列であることを示せ。
- (2) $\{b_n\}$ が等差数列ならば、 $\{a_n\}$ も等差数列であることを示せ。

[2009 茨城大]

(解答)

- (1) 数列 $\{a_n\}$ が等差数列であるとし、その初項を a 、公差を d とすると

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{2} n \{2a + (n-1)d\}$$

$$\text{よって } b_n = \frac{n \{2a + (n-1)d\}}{2n} = a + (n-1) \cdot \frac{d}{2}$$

したがって、数列 $\{b_n\}$ は初項 a 、公差 $\frac{d}{2}$ の等差数列である。終

- (2) 数列 $\{b_n\}$ が等差数列であるとし、その初項を b 、公差を e とすると

$$b_n = b + (n-1)e$$

[1] $n=1$ のとき

$$a_1 = 1 \cdot b_1 = b$$

[2] $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \\ &= nb_n - (n-1)b_{n-1} \\ &= n\{b + (n-1)e\} - (n-1)\{b + (n-2)e\} \\ &= b + (n-1) \cdot 2e \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$a_1 = b$ であるから、①は $n=1$ のときも成り立つ。

[1], [2] から、数列 $\{a_n\}$ は初項 b 、公差 $2e$ の等差数列である。終

§4. 等比数列と相乗平均

§3で考察した等差数列の性質の考えを、等比数列に発展させると、次のことが成り立つことがわかる。

すべての項が正である数列 $\{a_n\}$ に対して

$$c_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} \text{ とおく。}$$

- (1) 数列 $\{a_n\}$ が等比数列ならば、数列 $\{c_n\}$ も等比数列であることを示せ。
 (2) 数列 $\{c_n\}$ が等比数列ならば、数列 $\{a_n\}$ も等比数列であることを示せ。

(解答)

- (1) 数列 $\{a_n\}$ が等比数列であるとし、その初項を a 、公比を r ($a > 0, r > 0$) とすると

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } c_n &= \sqrt[n]{a \cdot ar \cdot ar^2 \cdots ar^{n-1}} \\ &= a \sqrt[n]{r^{1+2+3+\cdots+(n-1)}} \\ &= a \sqrt[n]{r^{\frac{1}{2}(n-1)n}} \\ &= ar^{\frac{1}{2}(n-1)} \\ &= a(\sqrt{r})^{n-1} \end{aligned}$$

したがって、数列 $\{c_n\}$ は初項 a 、公比 \sqrt{r} の等比数列である。 **終**

- (2) 数列 $\{c_n\}$ が等比数列であるとし、その初項を c 、公比を R ($c > 0, R > 0$) とすると

$$c_n = cR^{n-1}$$

$$\text{よって } c_n^n = (cR^{n-1})^n$$

$$\text{すなわち } a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = (cR^{n-1})^n \quad \cdots \text{①}$$

ゆえに、 $n \geq 2$ のとき

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} = (cR^{n-2})^{n-1} \quad \cdots \text{②}$$

このとき、①÷②から

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{c^n R^{(n-1)n}}{c^{n-1} R^{(n-2)(n-1)}} = cR^{2(n-1)} \\ &= c(R^2)^{n-1} \quad \cdots \text{③} \end{aligned}$$

$a_1 = c_1 = c$ であるから、③は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって、数列 $\{a_n\}$ は初項 c 、公比 R^2 の等比数列である。 **終**

(参考)

§4では§3に習って証明を与えたが、§3で示した同値関係(*)からも容易にわかる。

任意の数 a ($a > 0, a \neq 1$) を底とする対数を考え、

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log_a a_k \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n} \log_a a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \\ &= \log_a \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} \end{aligned}$$

であるから、数列 $\{a_n\}$ は等比数列である。

($\iff \log_a a_n$ は n の 1 次式である。)

\iff 数列 $\{\log_a a_n\}$ は等差数列である。

* \iff 数列 $\{A_n\}$ は等差数列である。

$\iff \log_a \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}$ は n の 1 次式である。

\iff 数列 $\{c_n\}$ は等比数列である。

§5. おわりに

等差数列は arithmetical progression, 相加平均は arithmetical mean, 等比数列は geometrical progression, 相乗平均は geometrical mean という。

さらに、等差中項、等比中項について、次のことが成り立つことは、参考書等にも書いてある。

◆ 数列 a, b, c が等差数列である。

$$\iff b = \frac{a+c}{2}$$

◆ a, b, c が 0 でないとき

数列 a, b, c が等比数列である。

$$\iff b^2 = ac$$

◇ 特に、 a, b, c が正のとき

数列 a, b, c が等比数列である。

$$\iff b = \sqrt{ac}$$

このようなことから、等差数列、等比数列には、相加平均、相乗平均が潜んでいることがわかる。

《参考文献》

- [1] スタンダード数学演習 I II AB 受験編, 数研出版

(岡山県立岡山芳泉高等学校)