# 簡単な動点の処理問題は簡単か？

ふじおか　まさと
藤岡　優太

## §1．問題1

「点P，Qがそれぞれ独立に点Oを中心とする半径1の円周上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

で表される点Xの動きうる範囲を図示せよ。」

上記の問題は，動点を扱う問題として基本的です。点Pを固定し，点Qを動かすと $\boxed{図1}$ となり，次に点Pを動かすことで（$\boxed{図2}$）求める範囲が点Oを中心とする半径2の円の周およびその内部であることが簡単にわかります（$\boxed{図3}$）。

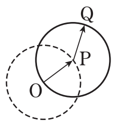


図1

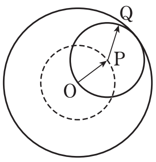


図2

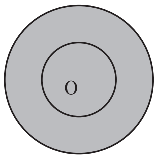


図3

## §2．問題2

『$0\leqq\alpha\leqq2\pi$，$0\leqq\beta\leqq2\pi$ のとき

$$\begin{cases}x=\cos\alpha+\cos\beta\\ y=\sin\alpha+\sin\beta\end{cases}$$

で表される点 $(x,\ y)$ の動きうる範囲を図示せよ。』

この問題は

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\bigstar$$

とすれば $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}$

と考えることにより，問題1とまったく同じ問題となります。

## §3．別解

ところで，問題2の $x$，$y$ は〈和積の公式〉を用いると

$$x=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$y=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

とかけることから

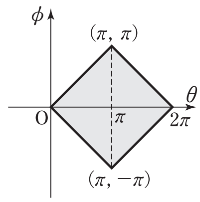
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\end{pmatrix}$$

と考えることができます。

簡便のため $\begin{cases}\theta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ \phi=\dfrac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$ とおくと

$$\begin{pmatrix}\theta\\ \phi\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$

であることから $(\theta,\ \phi)$ の動きうる範囲は右図となり，問題2を考えるには $(\theta,\ \phi)$ が右図の領域を動くとき

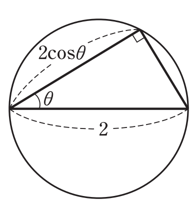


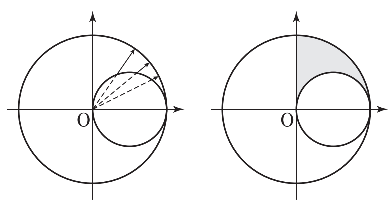

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\cos\phi\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

で表される点 $(x,\ y)$ の動きうる範囲を考えればOKとなります。そこで原則通り $\theta$ を固定し，$\phi$ を動かして $(x,\ y)$ の動きうる範囲を調べることにします。$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で $\theta$ を固定すると $\phi$ の動きうる範囲が $-\theta\leqq\phi\leqq\theta$ であることから $2\cos\theta\leqq2\cos\phi\leqq2$ です。

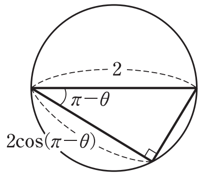
（i）$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$0\leqq2\cos\theta\leqq2\cos\phi\leqq2$ であることから右図を考えることで，点 $(x,\ y)$ が下右図網目部分を動くことがわかります。

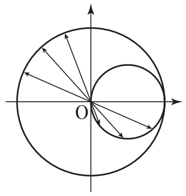


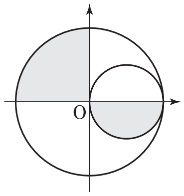



(ii)　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ のとき

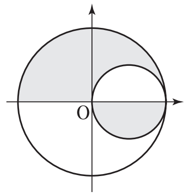



　$2\cos\theta \leqq 0 \leqq 2\cos\phi \leqq 2$ であり $-2\cos(\pi-\theta) \leqq 2\cos\phi \leqq 0$ または $0 \leqq 2\cos\phi \leqq 2$ であることから右図を考えることで，点$(x,\ y)$が下右図網目部分を動くことがわかります。

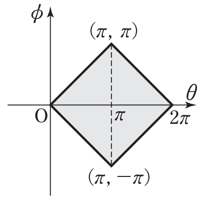


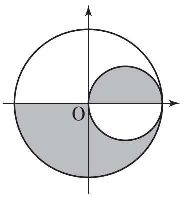

　(i)，(ii)から $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲では$(x,\ y)$が下図の網目部分を動くことがわかります。



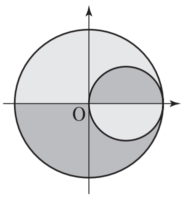

(iii)　$\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき




　$\theta = \pi$ での $\phi$ の対称性(右図)から，点$(x,\ y)$は下図網目部分を動くことがわかります。




　長くなりましたが以上のことから，点$(x,\ y)$は，下図網目部分を動くことがわかりました。




つまり，点$(x,\ y)$の動きうる範囲が点Oを中心とする半径2の円の周および内部であることがわかったわけです。

## §4. 最後に

　★の式をどう捉えるかで随分と【感じ】が変わります。難しい問題を快刀乱麻のごとくエレガントに解くことは痛快極まりないですが，簡単に解ける問題でもあれこれ考えてみると意外と愉快なことがあるなと実感した次第です。

（高知県　土佐高等学校）