$\sqrt{3}\tan 10^\circ + 4\sin 10^\circ = ?$

内藤（ないとう）　康正（やすまさ）

§1. はじめに

三角関数の計算問題で印象に残るものとして，次の(1.1)～(1.3)が挙げられると思います。

$$\boxed{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}} \quad \cdots\cdots(1.1)$$

$$\boxed{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}} \quad \cdots\cdots(1.2)$$

$$\boxed{\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ = \sqrt{3}} \quad \cdots\cdots(1.3)$$

(1.3)は2013年度に千葉大学の入試問題で，

「$\tan 10^\circ = \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ$ を示せ」

という形で出題されましたが，これらの計算は生徒が敬遠しがちな難問でもあります。その理由は

- 計算に積和公式が必要になること
- どの2つの三角関数に積和公式を用いたらよいのか迷うこと
- 残りの1つの三角関数が，計算上どうなるのか予見できないこと

などだろうと思います。そこで，2つの三角関数だけからなる適度な計算問題がないかを考えてみることにしました。特に最近気がついた新しいタイプの計算を §4. と §5. で紹介したいと思います。

§2. ある関係式の利用

先ほど(1.1)～(1.3)は積和公式が必要と述べましたが，例えば(1.2)であれば次のような計算の工夫で積和公式を避け，3倍角の公式に持ち込むことが可能です。

$$\begin{aligned}
&4\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ \\
&= 4\sin 20^\circ \sin(60^\circ - 20^\circ)\sin(60^\circ + 20^\circ) \\
&= \sin 20^\circ(\sqrt{3}\cos 20^\circ - \sin 20^\circ) \\
&\qquad\qquad \times(\sqrt{3}\cos 20^\circ + \sin 20^\circ) \\
&= \sin 20^\circ(3\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ) \\
&= \sin 20^\circ(3 - 4\sin^2 20^\circ) \\
&= 3\sin 20^\circ - 4\sin^3 20^\circ = \sin(3\cdot 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

この計算の過程から，一般に

$$4\sin\theta\sin(60^\circ - \theta)\sin(60^\circ + \theta) = \sin 3\theta \quad \cdots\cdots①$$

という関係があることも分かります。

関係式①で，θ の特殊な値を代入すると以下のようにいろいろな等式が得られます。θ の値によっては，2つの三角関数だけからなる計算問題が得られることが分かります。

(1)　$3\theta = 30^\circ$ または $3\theta = 15^\circ$ とすると

$$\boxed{\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}} \quad \cdots\cdots(2.1)$$

$$\boxed{\sin 5^\circ \sin 55^\circ \sin 65^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{16}} \quad \cdots\cdots(2.2)$$

これらは積和公式の計算練習としてときどき見かけるものです。

(2.1)は(1.1)の裏返しに過ぎません。

(2)　$3\theta = 45^\circ$ とすると

$$\boxed{\sin 15^\circ \sin 75^\circ = \frac{1}{4}} \quad \cdots\cdots(2.3)$$

$\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2}\sin 30^\circ = \frac{1}{4}$ ですから，

2倍角の公式の練習に向いています。積和公式の利用は牛刀を用いる感があります。

(3)　$3\theta = 36^\circ$ または $3\theta = 72^\circ$ とすると

$$\boxed{\sin 12^\circ \sin 48^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{8}} \quad \cdots\cdots(2.4)$$

$$\boxed{\sin 24^\circ \sin 84^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{8}} \quad \cdots\cdots(2.5)$$

(4)　$3\theta = 18^\circ$ または $3\theta = 54^\circ$ とすると

$$\boxed{\sin 6^\circ \sin 66^\circ = \frac{3 - \sqrt{5}}{8}} \quad \cdots\cdots(2.6)$$

$$\boxed{\sin 42^\circ \sin 78^\circ = \frac{3 + \sqrt{5}}{8}} \quad \cdots\cdots(2.7)$$

これら4つの等式はあまり見かけることがありません。ただ，計算練習としては

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},\quad \sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \quad \cdots\cdots②$$

を用いることになるので，②の導出とセットで出

題するのが現実的かと思います。

さて，②の２式を辺々掛け合わせると

$$\boxed{\sin 18^\circ \sin 54^\circ = \frac{1}{4}} \quad \cdots\cdots(2.8)$$

が得られます。(2.8)は，左辺を

$$\sin 18^\circ \sin 54^\circ = 2\sin 9^\circ \cos 9^\circ \sin 54^\circ$$

とすることで

$$\boxed{\sin 9^\circ \sin 54^\circ \sin 81^\circ = \frac{1}{8}} \quad \cdots\cdots(2.9)$$

に姿を変えます。

なお，①は

$$\sin n\theta = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta + \frac{k}{n}\pi\right) \quad \cdots\cdots③$$

の $n=3$ の場合に相当します。

§3. 半角の公式が大活躍

(2.8)は②を既知としない場合，なかなか大変な計算問題となります。しかし，結果が根号を含まない値だけにうまい手がないかと探ってみると，次のように半角公式の連発で解決することが分かりました。

$$\sin 54^\circ \sin 18^\circ = \sin(36^\circ + 18^\circ)\sin(36^\circ - 18^\circ)$$
$$= \sin^2 36^\circ \cos^2 18^\circ - \cos^2 36^\circ \sin^2 18^\circ$$
$$= \frac{1-\cos 72^\circ}{2}\cdot\frac{1+\cos 36^\circ}{2} - \frac{1+\cos 72^\circ}{2}\cdot\frac{1-\cos 36^\circ}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 36^\circ - \cos 72^\circ) = \frac{1}{2}(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)$$

ここで

$$\sin 54^\circ - \sin 18^\circ = \frac{\sin^2 54^\circ - \sin^2 18^\circ}{\sin 54^\circ + \sin 18^\circ}$$
$$= \frac{\frac{1-\cos 108^\circ}{2} - \frac{1-\cos 36^\circ}{2}}{\sin 54^\circ + \sin 18^\circ}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos 108^\circ + \cos 36^\circ}{\sin 54^\circ + \sin 18^\circ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 18^\circ + \sin 54^\circ}{\sin 54^\circ + \sin 18^\circ}$$
$$= \frac{1}{2}$$

ですから，$\sin 54^\circ \sin 18^\circ = \frac{1}{4}$ となります。

実用的というよりは“観賞用”かもしれません。しかし，数学Ⅱの範囲ではあまり陽のあたらない半角の公式が主役になるあたりは，鑑賞だけでも十分価値があると思います。さらにこの変形の後半では

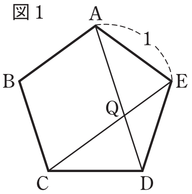
$$\boxed{\sin 54^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots(3.1)$$

という関係式も確認できましたが，これは

$$\boxed{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots(3.2)$$

と見ると，正５角形に対角線を引いたときの長さの関係であることが分かります(図１)。

図１



正５角形の１辺を１として

AQ＋QD＝AD

が

$$1 + 2\cos 72^\circ = 2\cos 36^\circ$$

になっていて，これが(3.2)に他なりません。

これをきっかけに，正 18 角形の対角線について同様の関係がないか調べた結果が本題です。§4. と§5. で紹介したいと思います。

§4. $\sqrt{3}\tan 10^\circ + 4\sin 10^\circ = 1$

正 18 角形の対角線にはたくさんの共点があるので，先ほどの正５角形の場合と同様の関係式が多数あるのではないかと思って調べたところ，最初に見つかったのが次の等式です。

$$\boxed{\sqrt{3}\tan 10^\circ + 4\sin 10^\circ = 1} \quad \cdots\cdots(4.1)$$

左辺から右辺は次のようにして導くことができます。

$$\sqrt{3}\tan 10^\circ + 4\sin 10^\circ = \frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} + 4\sin 10^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ + 4\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

ここで

$$\text{分子} = \sqrt{3}\sin 10^\circ + 2\sin 20^\circ$$
$$= \sqrt{3}\sin 10^\circ + 2\sin(30^\circ - 10^\circ)$$
$$= \sqrt{3}\sin 10^\circ + \cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ = \cos 10^\circ$$

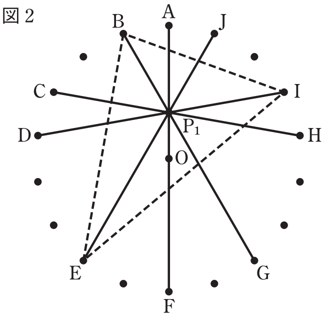
という具合です。同様の計算過程が成立する角を調べると，類似の式が３つ得られます。

$$\boxed{\tan 20^\circ + 4\sin 20^\circ = \sqrt{3}} \quad \cdots\cdots(4.2)$$
$$\boxed{-\tan 40^\circ + 4\sin 40^\circ = \sqrt{3}} \quad \cdots\cdots(4.3)$$
$$\boxed{-\sqrt{3}\tan 50^\circ + 4\sin 50^\circ = 1} \quad \cdots\cdots(4.4)$$

いずれも計算結果がすっきりすること，手ごろな式変形で済むことから，生徒の練習問題として使えるのではないかと思います。

では，(4.1)は正 18 角形のどこにあるのでしょう。正 18 角形の対角線の共点の一例が図２で，５本の対角線が１点 P_1 で交わって(５重点と呼ぶことにします)います。点Oは正 18 角形の中心です。

図2



円周角の定理から，線分 BG，EJ，ID が△BEI の各頂点の二等分線になっているため，点 P_1 が△BEI の内心です。さらに BG，EJ が AF に関して対称であることから 5 本の対角線がこの内心で共点になります。(このタイプの 5 重点は 18 個存在し，この他に 2 つのタイプの 5 重点が存在します。)

そして(4.1)は正 18 角形が単位円に内接する，すなわち AO=1 として次のようにして得られたものなのです。AI=1 でもあるので，線分 CI と AF の交点を Q とすれば，

$$\mathrm{AQ}=\mathrm{AI}\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{QP_1}=\mathrm{IQ}\tan 10^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan 10^\circ$$

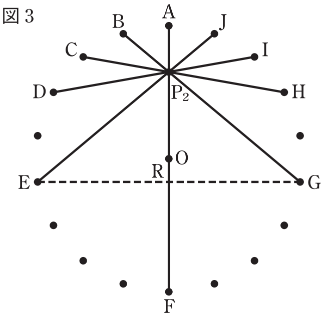
$$\mathrm{P_1O}=2\sin 10^\circ$$

これらを $\mathrm{AQ}+\mathrm{QP_1}+\mathrm{P_1O}=1$ に代入・整理すると(4.1)です。

§5. その他の 5 重点から

図 2 とは別の 5 重点が次の図 3 の点 P_2 です。

図3



この図からは次のようにして新しい計算式を得ることができます。

$$\mathrm{OP_2}=\mathrm{P_2R}-\mathrm{OR}=\cos 10^\circ\tan 40^\circ-\sin 10^\circ$$

$$=\frac{\sin(40^\circ-10^\circ)}{\cos 40^\circ}=\frac{1}{2\cos 40^\circ}$$

$$\mathrm{AP_2}=\mathrm{AJ}=2\sin 10^\circ$$

$\mathrm{OP_2}+\mathrm{AP_2}=1$ から

$$\boxed{\frac{1}{2\cos 40^\circ}+2\sin 10^\circ=1} \quad \cdots\cdots(5.1)$$

左辺は次のように変形することが可能です。

$$\frac{1}{2\cos 40^\circ}+2\sin 10^\circ=\frac{1+4\sin 10^\circ\cos 40^\circ}{2\cos 40^\circ}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\text{分子}&=1+4\sin(40^\circ-30^\circ)\cos 40^\circ\\
&=1+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40^\circ-\frac{1}{2}\cos 40^\circ\right)\cos 40^\circ\\
&=\sqrt{3}\cdot 2\sin 40^\circ\cos 40^\circ+(1-2\cos^2 40^\circ)\\
&=\sqrt{3}\sin 80^\circ-\cos 80^\circ\\
&=2\sin(80^\circ-30^\circ)=2\sin 50^\circ=2\cos 40^\circ
\end{aligned}$$

積和公式利用でもよいのですが，加法定理で角度を 40° にそろえるというシンプルな手法でうまくいきます。正弦・余弦の 2 倍角の公式，三角関数の合成などが一度に練習できる有意義な 1 題だと思います。

図形頼りには限界があるので，ここで §2. 冒頭の変形をヒントに 3 倍角の公式の活用を考えてみました。すると

$\cos(3\times 40^\circ)=-\dfrac{1}{2}$ から

$$8\cos^3 40^\circ-6\cos 40^\circ+1=0$$

$$8\sin^3 50^\circ-6\sin 50^\circ+1=0$$

$$4\sin 50^\circ(2\sin^2 50^\circ-1)-2\sin 50^\circ+1=0$$

$$-4\sin 50^\circ\cos 100^\circ-2\sin 50^\circ+1=0$$

$4\sin 50^\circ\sin 10^\circ+1=2\sin 50^\circ$ より

$$\frac{1}{2\cos 40^\circ}+2\sin 10^\circ=1$$

という具合に(5.1)が得られることが分かったのです。あとは機械的に

$\cos(3\times 80^\circ)=-\dfrac{1}{2}$ や $\cos(3\times 160^\circ)=-\dfrac{1}{2}$ から

$$\boxed{\frac{1}{2\sin 10^\circ}-2\cos 20^\circ=1} \quad \cdots\cdots(5.2)$$

$$\boxed{2\sin 50^\circ-\frac{1}{2\cos 20^\circ}=1} \quad \cdots\cdots(5.3)$$

が得られます。他にも $\cos(3\times 10^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ からは

$$\boxed{2\sin 70^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2\sin 80^\circ}=1} \quad \cdots\cdots(5.4)$$

など，次々と得られることが分かりました。

§6. 結びに変えて

さて，正 18 角形から図 4 のような構図を取り出すと四角形 ABCD の対角線が直交することから

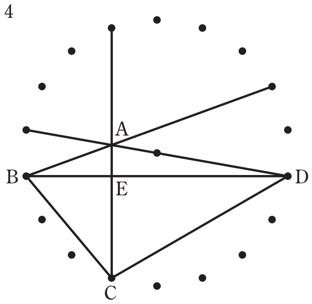
$$\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{ED}}=\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EB}}\times\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{ED}}\times\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{EC}}$$

すなわち

$$\tan 10°=\tan 20°\tan 30°\tan 40°$$

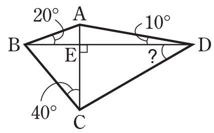
という，冒頭の千葉大学の問題が隠れていたことが分かります。点Aが 5 重点になっています。

図 4



こうして千葉大学の問題は，図 5 で ∠BDC は何度か？という初等幾何の問題に生まれ変わります。

図 5



単なる計算問題にこのような味付けをすることも楽しい試みではないかと思います。また，補助線の難しさを知れば，三角関数の計算のありがたみが実感できるかもしれません。

最後に，(2.9)から

$$\sin 9°\sin 27°\sin 63°\sin 81°=(0.5)^4$$

という小町算が得られたことも添えておきます。本来数学の面白さは自分で考えるところにあるのに，いつの間にか公式を暗記し反復練習する科目になりがちです。こうした“遊び心”は忘れそうになる知的好奇心を刺激するもので，大切にしたいと思います。

（東京都立立川高等学校）