$r>1$ に対し ${}_n\mathrm{P}_r$ は平方数になるか

鈴木(すずき)　直矢(なおや)

§1. はじめに

数研通信 91 号において，西元教善先生はベルトラン・チェビシェフの定理の応用として次の定理を証明されました。

定理 1.1　2 以上の自然数 n に対し，$n!$ は平方数ではない。

$n!={}_n\mathrm{P}_n$ でありますので，この定理の主張は「2 以上の自然数 n に対し，${}_n\mathrm{P}_n$ は平方数にならない。」と言い換えることもできます。では一般に，

「任意の $r>1$ に対し ${}_n\mathrm{P}_r$ は平方数にならない。」

と言えるでしょうか。($r=1$ のときは ${}_n\mathrm{P}_1=n$ ですから n が平方数なら ${}_n\mathrm{P}_1$ も平方数となります。)

ここではこの問題に対する部分的な結果について説明します。

§2. ベルトラン・チェビシェフの定理を用いた考察

まずベルトラン・チェビシェフの定理とは次の定理のことです。

定理 2.1（ベルトラン・チェビシェフの定理）

任意の自然数 m について，$m<p\leqq 2m$ を満たす素数 p が存在する。

この定理の応用として次の定理が導かれます。

定理 2.2　n を 3 以上の任意の自然数とする。このとき $\left[\dfrac{n}{2}\right]+1<r\leqq n$ を満たす任意の自然数 r に対し，${}_n\mathrm{P}_r$ は平方数にならない。ここで $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す。

(証明)　ベルトラン・チェビシェフの定理により $\left[\dfrac{n}{2}\right]<p\leqq n$ を満たす素数 p が存在する。

$n\leqq 2\left[\dfrac{n}{2}\right]+1$ より $n-\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]+1\right)\leqq\left[\dfrac{n}{2}\right]$ であるから，

${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)\cdots\left\{n-\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]+1\right)\right\}\cdots\{n-(r-1)\}$ は素数 p を含むが p^2 を含まない。よって，平方数とはならない。 □

次の精密化されたベルトラン・チェビシェフの定理を用いれば，より強い結果が導かれます。

定理 2.3（精密化されたベルトラン・チェビシェフの定理）

任意の自然数 m について，$2m\leqq p\leqq 3m$ を満たす素数 p が存在する。

なお，この定理の証明は数研通信 76 号，91 号においてそれぞれ才野瀬先生，筆者によるものが掲載されております。

定理 2.4　n を 2 以上の任意の自然数とする。このとき $\left[\dfrac{n}{3}\right]+1<r\leqq n$ を満たす任意の自然数 r に対し，${}_n\mathrm{P}_r$ は平方数にならない。

(証明)　精密化されたベルトラン・チェビシェフの定理により $\left[\dfrac{2n}{3}\right]\leqq p\leqq n$ を満たす素数 p が存在する。$n\leqq\left[\dfrac{2n}{3}\right]+\left[\dfrac{n}{3}\right]+1$ より $n-\left(\left[\dfrac{n}{3}\right]+1\right)\leqq\left[\dfrac{2n}{3}\right]$ であるから，

${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)\cdots\left\{n-\left(\left[\dfrac{n}{3}\right]+1\right)\right\}\cdots\{n-(r-1)\}$ は素数 p を含むが p^2 を含まない。よって，平方数とはならない。 □

ベルトラン・チェビシェフの定理の更なる精密化として，次の命題が成り立つであろうと予想されます。

予想 2.1　2 以上の任意の自然数 m について，
m，$2m$，$3m$，$4m$，$\cdots$，$(m-2)m$，$(m-1)m$，m^2 の間にはそれぞれ素数が存在する。

注意 2.1　筆者は $2\leqq m\leqq 30$ に対してはこの予想が正しいことを確認しました。しかし $(m-1)m$ と m^2 の間に必ず素数があるという主張は「2 以上の任意の自然数 m について，$(m-1)^2$ と m^2 の間には必ず素数が存在する。」という有名なルジャンドル予想よりさらに強い内容ですので，もう少し弱める必要があるかもしれません。

とりあえず予想 2.1 が正しいと仮定すると，2 以上の任意の自然数 n に対し $([\sqrt{n}]-1)[\sqrt{n}]\leqq p\leqq n$ を満たす素数 p が存在することになります。したがって，$x=n-([\sqrt{n}]-1)[\sqrt{n}]$ とおいたとき，$n(n-1)(n-2)\cdots(n-x)$ は平方数ではないということになります。$n<([\sqrt{n}]+1)^2$ より $x\leqq 3[\sqrt{n}]$ ですので，予想 2.1 が正しければ次の予想も正しいという事になります。

予想 2.2　n を 37 以上の任意の自然数とする。このとき $3[\sqrt{n}]<r\leqq n$ を満たす任意の自然数 r に対し，${}_n\mathrm{P}_r$ は平方数にならない。

注意 2.2　37 以上という条件は，$n-3[\sqrt{n}]\leqq p\leqq n$ かつ $2p\leqq n$ を満たす素数 p が存在しないようにするためのものです。

例えば $n=10000$ のときは，$300<r\leqq 10000$ に対し ${}_{10000}\mathrm{P}_r$ は平方数になりません。

§3. $r=2,\ 3,\ 4$ の場合の証明

この節では素数の分布に関する結果や予想を用いずに，$r=2,\ 3,\ 4$ に対して ${}_n\mathrm{P}_r$ が平方数にならないことを証明します。

定理 3.1　2 以上の任意の自然数 n に対し，${}_n\mathrm{P}_2$ は平方数ではない。

(証明)　$(n-1)^2<{}_n\mathrm{P}_2=n(n-1)<n^2$ より従う。 □

定理 3.2　3 以上の任意の自然数 n に対し，${}_n\mathrm{P}_3$ は平方数ではない。

(証明)　背理法により証明する。
${}_n\mathrm{P}_3=n(n-1)(n-2)$ であるから，もし ${}_n\mathrm{P}_3$ が平方数だと仮定すると，ある自然数 a に対し $n(n-1)(n-2)=a^2$ が成り立つ。$(n-1)$ は n, $(n-2)$ と互いに素であることから，このとき $(n-1)$ も平方数でなければならず，したがって $n(n-2)$ も平方数となる。すなわち，$n=x+1$ とおいたとき，ある自然数 b が存在して $(x+1)(x-1)=b^2$ が成り立たなければならない。よって，$(x+b)(x-b)=1$ となるが，これは $x\geqq 2$ と矛盾する。 □

定理 3.3　4 以上の任意の自然数 n に対し，${}_n\mathrm{P}_4$ は平方数ではない。

(証明)
$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{P}_4&=n(n-1)(n-2)(n-3)\\&=\{n(n-3)\}\{(n-1)(n-2)\}\\&=(n^2-3n)(n^2-3n+2)\end{aligned}$$
であり，したがって $(n^2-3n)^2<{}_n\mathrm{P}_4<(n^2-3n+1)^2$ となるから，${}_n\mathrm{P}_4$ は平方数ではない。 □

高校数学までの知識で $r=5$，6，$\cdots$ の場合を考えるというのは意欲的な学生にとって良い問題になると思われます。

《参考文献》

〔1〕 西元教善「ベルトラン・チェビシェフの定理を使う～$n!$ $(n\geqq 2)$ は平方数ではないことの証明～」数研通信 No.91，pp.24～25

〔2〕 鈴木直矢「～数研通信 70 号，76 号を読んで～精密化されたチェビシェフの定理の初等的証明について」数研通信 No.91，pp.26～28

〔3〕 才野瀬一郎「数研通信 70 号を読んで チェビシェフの定理の精密化―n と $1.5n$ の間に素数がある―」数研通信 No.76，pp.22～26

(秋田県　秋田工業高等専門学校)