正弦曲線の極値点における曲率半径

いとう　のぶお
伊藤　亘央

§1. はじめに

正弦曲線の極値点を含む微小な部分は，円の弧のように見える。そこで，正弦曲線における極値点を含む微小な部分について，半径がどのくらいの円の弧に近似されるのかを考察したい。

§2. 極値点における『曲率半径』の定義

曲線 $y=f(x)$ 上の非特異点である極値点における『曲率半径』を次のように定義する。

曲線 $y=f(x)$ の極値点の１つをＰ，この曲線上のＰと異なる点をＱとする。2点Ｐ，Ｑを通りＰにおいてこの曲線に接する円の半径を r とする。このとき，極限値 $\lim_{Q\to P} r$ を極値点Ｐにおける『曲率半径』と呼ぶこととする。

この定義は，曲線上の非特異点である極値点を含むその曲線の微小な部分が，“円の弧”に近似されると考えたときのその円の半径という意味になる。

§3. 正弦曲線の極値点における曲率半径

正弦曲線の極値点における曲率半径を調べる。

正弦曲線は無数の極値点をもつ中で，曲線の周期性と対称性から，極値点における曲率半径は一定のはずである。そこでまずは，原点Ｏで極小点をもつ正弦曲線 $y=a-a\cos bx$ $(a>0,\ b>0)$ における原点Ｏでの曲率半径を求める。

y 軸の正の部分に中心をもち，原点Ｏで x 軸に接する半径 r の円 $x^2+(y-r)^2=r^2$ と正弦曲線 $y=a-a\cos bx$ との共有点のうち，原点Ｏと異なるものの１つをＱとし，Ｑの x 座標を α とする。

α は $x^2+\{a(1-\cos bx)-r\}^2=r^2$ の解の１つであるから　$\alpha^2+a^2(1-\cos b\alpha)^2-2ra(1-\cos b\alpha)=0$

$\alpha\neq 0$ より

$$r=\frac{\alpha^2}{2a(1-\cos b\alpha)}+\frac{a(1-\cos b\alpha)}{2}$$
$$=\frac{\alpha^2(1+\cos b\alpha)}{2a\sin^2 b\alpha}+\frac{a(1-\cos b\alpha)}{2}$$
$$=\frac{1+\cos b\alpha}{2a}\cdot\frac{(b\alpha)^2}{\sin^2 b\alpha}\cdot\frac{1}{b^2}+\frac{a(1-\cos b\alpha)}{2}$$

ここで，$Q\to O \Leftrightarrow \alpha\to 0$ であるから，正弦曲線 $y=a-a\cos bx$ の原点Ｏにおける曲率半径は

$$\lim_{Q\to O} r=\lim_{\alpha\to 0} r$$
$$=\lim_{\alpha\to 0}\left\{\frac{1+\cos b\alpha}{2a}\cdot\frac{(b\alpha)^2}{\sin^2 b\alpha}\cdot\frac{1}{b^2}+\frac{a(1-\cos b\alpha)}{2}\right\}$$
$$=\frac{2}{2a}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{b^2}+0$$
$$=\frac{1}{ab^2}$$

一般に正弦曲線は，方程式の“cos”と“sin”を入れ替えても平行移動によって一致するから，例えば正弦曲線 $y=a\sin bx$ の各極値点の曲率半径も同じ $\frac{1}{ab^2}$ であり，以上を一般化すると次のことがいえる。

『振幅 a，周期 $\frac{2\pi}{b}$ $(a>0,\ b>0)$ の正弦曲線の極値点における曲率半径は $\frac{1}{ab^2}$ である。』

比較例として，正弦曲線

$$y=\sin x,\quad y=2\sin x,\quad y=\sin 2x,\quad y=\sin\frac{x}{2}$$

の極値点における曲率半径はそれぞれ $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ 4$ である。

（愛知県　名古屋国際中学校・高等学校）