同じものを含む円順列について

才野瀬（さいのせ）　一郎（いちろう）

§1. はじめに

同じものを含む円順列の総数Qを考える。次の例題１が具体的な問題であり，一般的な形で書くと主題となる。これに関しては，参考文献〔１〕§3において，バーンサイドの補題を利用した公式Ⅱが紹介されている。

ここでは，まず命題７(1)において，同じものを含む円順列の場合について，バーンサイドの補題を証明する。次に命題７(2)において，オイラー関数を用いた形で公式Ⅱを再掲し，主題の結論とする。

［例題１］

次の数をすべて使った円順列の総数を求めよ。

(1)　1，2が２個ずつの計４個

(2)　1，2，3が４個ずつの計12個

(3)　1が３個，2が４個，3が５個の計12個

［主題］

N_1，N_2，……，N_mを互いに素な自然数，Gを自然数とする。異なるm種類の数がそれぞれN_1G，N_2G，……，N_mG個の合計 $N=N_1G+N_2G+\cdots\cdots+N_mG$(個) あるとき，$N$個すべてを使ってできる円順列の総数$Q$を求める。

§2. 円形配置の周期

［準備２］　用語の整理

主題におけるN個の数からなる同じものを含む順列 $A=(a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_N)$ を考える。

(1)　順列Aに現れる数a_nを座標平面の単位円上の点$(\cos(2n\pi/N),\ \sin(2n\pi/N))$に配置する。この円形配置も$A$と表す。

もちろん，順列と円形配置の総数は等しい。

(2)　kを整数として，円形配置Aの各数a_nを原点中心に時計回りに$2\pi k/N$だけ回転した円形配置を考え，A_{+k}と表す。

($k<0$ の場合は反時計回りに$2\pi|k|/N$だけ回転する。)

特に $1\leqq k\leqq N-1$ のときは

$A_{+k}=(a_{k+1},\ \cdots\cdots,\ a_N,\ a_1,\ \cdots\cdots,\ a_k)$ である。

さらに，A，Bを円形配置，k，lを整数とすると

$A_{+N}=A_{+0}=A$　……①

$A=B$ ならば $A_{+k}=B_{+k}$　……②

$(A_{+k})_{+l}=A_{+(k+l)}$　……③

$B=A_{+k} \iff A=B_{+(-k)}$　……④

が成り立つことは明らかであろう。

(3)　円形配置A，Bが表す円順列が順にα，βとなるとき，$\overline{A}=\alpha$，$\overline{B}=\beta$ と表そう。

円順列は，原点を中心とする回転により重なりあう円形配置を同類と考えるので，

$\overline{A}=\overline{B}$ ($\alpha=\beta$) となるための必要十分条件は，

「$B=A_{+k}$ となる整数kが存在する」ことである。

もちろん $\overline{A_{+k}}=\overline{A}$ (kは整数)

(4)　$A_{+t}=A$ となる整数tを円形配置Aの周期と呼ぼう。

①によれば，NはAの周期であるから，Aには正の周期の最小値$T(1\leqq T\leqq N)$が存在する。TをAの最小周期と呼ぼう。

また，整数tを周期とする円形配置A全体の集合を$X(2\pi t/N)$と表す。

すると①により次が成り立つ。

$X(2\pi)=$(すべての円形配置の集合)　……⑤

(5)　例えば，例題１(1)において，円形配置(同じものを含む順列)は全部で ${}_4\mathrm{C}_2=\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 個 ある。

ここで，$A=(1,\ 1,\ 2,\ 2)$，$B=(1,\ 2,\ 1,\ 2)$ とおくと，円形配置のすべては

$A_{+0}=A$，$A_{+1}=(2,\ 1,\ 1,\ 2)$，$A_{+2}=(2,\ 2,\ 1,\ 1)$，$A_{+3}=(1,\ 2,\ 2,\ 1)$，$B_{+0}=B$，$B_{+1}=(2,\ 1,\ 2,\ 1)$

で尽くされており，次の図の通り。

A_{+k}，B_{+k}の最小周期はそれぞれ4，2である。

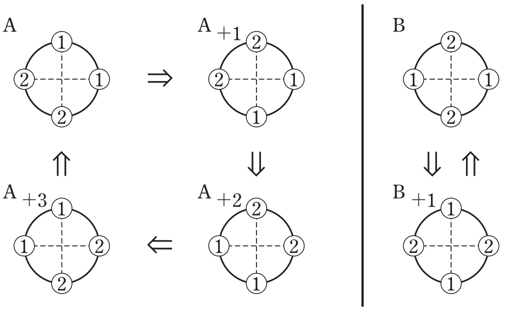
集合$X(2\pi t/4)$ ($t=1,\ 2,\ 3,\ 4$) について，周期２の円形配置の集合は $X(\pi)=\{B,\ B_{+1}\}$

周期4に関しては(4)⑤より

$$X(2\pi)=\{A,\ A_{+1},\ A_{+2},\ A_{+3},\ B,\ B_{+1}\}$$

周期1と3の円形配置は存在しないので，
$X(\pi/2)$ と $X(3\pi/2)$ は空集合である。

最後に，$A_{+k}\neq B$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ 3$) により，(3)から $\overline{A}\neq\overline{B}$ である。よって，円順列は $\overline{A}$，$\overline{B}$ の総数 $Q=2$ 通りである。



§3. 周期の性質

［命題3］ 周期

t，u，j，k は整数，A は円形配置とする。

(1) t と u が A の周期ならば，次も周期である。
 (ア) $t+u$，(イ) $-t$，(ウ) jt，(エ) $jt+ku$

(2) t と u の最大公約数を v とすると，
 t と u がともに A の周期 $\Longleftrightarrow$ v が A の周期

(3) t が A の周期 $\Longleftrightarrow$ t が A_{+k} の周期
 特に，A と A_{+k} の最小周期は同じである。

(4) 整数 k を周期 t で割った余りを r とすると，
 $A_{+k}=A_{+r}$ である。

証明 準備2(2)①～④を用いる。

(1) (ア) 仮定 $A_{+t}=A_{+u}=A$ と③により，
 $A_{+(t+u)}=(A_{+t})_{+u}=A_{+u}=A$
 (イ) $A=A_{+t}$ ならば④により $A_{-t}=A$
 (ウ) 前半：$j\geqq 0$ の場合。まず0は周期である。さらに，jt が周期ならば t が周期より
 $(j+1)t=jt+t$ が周期(∵(ア))となり，帰納的にすべての jt が周期となる。
 後半：$j<0$ の場合。前半と(イ)による。
 (エ)：(ウ)と(ア)による。

(2) まず「⇒」を示す。t と u の最大公約数を v とすると，「$t=av$，$u=bv$，a と b は互いに素な自然数」と表せる。参考文献［2］(1)により，
$ax+by=1$ となる整数 x，y が存在する。この両辺を v 倍した $tx+uy=v$ は(エ)により周期である。
逆は，t，u が v の倍数であるから(ウ)より従う。

(3) $A_{+t}=A$ ならば，③より
 $(A_{+k})_{+t}=A_{+(k+t)}=(A_{+t})_{+k}=A_{+k}$
 逆に，$A=(A_{+k})_{+(-k)}$ (∵④) と前半より，A_{+k} の周期 t は A の周期となる。

(4) $k=qt+r$ ($0\leqq r<t$，q と r は整数) と表せること，および(ウ)と③により，
 $A_{+k}=A_{+(qt+r)}=(A_{+qt})_{+r}=A_{+r}$

［命題4］ 最小周期

円形配置 A の最小周期を T とする。

(1) t が T の倍数 $\Longleftrightarrow$ t が A の周期

(2) T は N の約数であり，D を N の約数として
 $T=N/D$ と表せる。

(3) $A\in X\ (2\pi l/N)$ となる l ($1\leqq l\leqq N$) は
 $l=T,\ 2T,\ 3T,\ \cdots\cdots,\ DT\ (=N)$ の D 通りである。

(4) $\overline{B}=\overline{A}$ となる円形配置 B (A と同じ円順列となる B) で相異なるものは次の T 通り。

$$B=A,\ A_{+1},\ A_{+2},\ \cdots\cdots,\ A_{+(T-1)} \qquad \cdots\cdots⑥$$

証明 (1) 「⇒」は命題3(1)(ウ)による。

逆に，t が A の周期ならば，t を T で割った余りを r として $r=0$ を示す。実際，命題3(4)により
$A=A_{+t}=A_{+r}$ ($0\leqq r<T$)。ここで T の最小性から $r=0$

(2)と(3)は(1)による。(N は周期)

(4) 命題3(4)より B は⑥の形に書けるので，⑥が相異なることを示せばよい。

もし $A_{+k}=A_{+j}$ ($0\leqq j\leqq k<T$) と仮定すると，
$0\leqq k-j<T$ かつ，準備2(2)①③より

$$A_{+(k-j)}=(A_{+k})_{+(-j)}=(A_{+j})_{+(-j)}$$
$$=A_{+(j-j)}=A_{+0}=A$$

となり，$k-j$ は周期。
ここで T の最小性から $k-j=0$ ($k=j$)
となるので，⑥は相異なる。

［命題5］

d は N の正の約数とする。もし，

$$k\leqq d,\ k \text{ は } d \text{ と互いに素な自然数} \qquad \cdots\cdots⑦$$

ならば，$X(2\pi k/d)=X(2\pi/d)$ である。

証明 $N=de$ (e は自然数) と表すと，
$X(2\pi k/d)=X(2\pi ke/N)$，$X(2\pi/d)=X(2\pi e/N)$
である。k と d が互いに素より，ke と $N=de$ の最大公約数は e である。N は周期であるから命題3(2)により，ke が周期となることと e が周期となることは同値である。
ゆえに $X(2\pi ke/N)=X(2\pi e/N)$

［**命題 6**］

主題において，dをNの正の約数とすると

$|X(2\pi/d)|>0 \iff d|G$　（dはGの約数）

ここで，集合Xに属する要素の個数を$|X|$と表す。

このとき，$M_d=\dfrac{(N/d)!}{(N_1G/d)!\cdots\cdots(N_mG/d)!}$

とおくと　$|X(2\pi/d)|=M_d$

証明　もし $|X(2\pi/d)|>0$ ならば，

$A=(a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_N)\in X(2\pi/d)$ となる円形配置Aが存在する。Aは $t=N/d$ を周期とするから，a_1，a_2，……，a_tという数列が円形配置Aの中にd回繰り返して現れるので，dはN_1G，……，M_mGの公約数である。ここで，N_1，……，N_mが互いに素より，dはGの約数となる。

逆を示す。もし$d|G$とすると，m種類の数をN_1G/d，……，N_mG/d個ずつ合計 $t=N/d$ 個取り出してできる相異なる数列a_1，a_2，……，a_tの総数はM_d通り。

tを周期とする円形配置Aは，この数列をd回繰り返し並べて構成されるから，円形配置の総数と数列の総数は一致する。

したがって　$|X(2\pi/d)|=M_d>0$

§4. 主題の結論と例題の答

命題 5 において，自然数dに対して⑦を満たす自然数kの個数を$\phi(d)$と表し，オイラー関数と呼ぶ。(参考文献〔 2 〕(2))

また，数列$\{f_n\}$において，dが自然数Gの正の約数全体を動くときのf_dの和を$\sum_{d|G} f_d$と表す。

［**命題 7**］**主題の結論**

主題において，

(1)　次のバーンサイドの補題が成り立つ。

$$NQ=\sum_{l=1}^{N}|X(2\pi l/N)|$$

(2)　公式Ⅱの表現を変えた次の等式が成り立つ。

$$Q=\frac{1}{N}\sum_{d|G}\frac{(N_1d+\cdots\cdots+N_md)!}{(N_1d)!\cdots\cdots(N_md)!}\cdot\phi\left(\frac{G}{d}\right)$$

特に，$G=1$ のとき

$$Q=\frac{1}{N}\times\frac{N!}{N_1!\cdots\cdots N_m!}$$

証明　(1)　任意の円順列αに対して，円形配置Aの中で，$\overline{A}=\alpha$ かつ周期が l となるものの集合を$X_\alpha(2\pi l/N)$と表す。

αをQ通りのすべての円順列にわたり動かすことにより，次の等式を得る。

$$|X(2\pi l/N)|=\sum_{\alpha}|X_\alpha(2\pi l/N)|$$

すると，lとαの和の順序を入れ替えて

$$右辺=\sum_{l=1}^{N}|X(2\pi l/N)|=\sum_{l=1}^{N}\sum_{\alpha}|X_\alpha(2\pi l/N)|$$

$$=\sum_{\alpha}\sum_{l=1}^{N}|X_\alpha(2\pi l/N)|$$

ここで，任意の円順列αを固定し，$\alpha=\overline{A}$ となる円形配置Aを１つ選び，その最小周期を$T=N/D$ とする(命題 4 (2))。

命題 4 (4)より，$\overline{B}=\alpha(=\overline{A})$ となる相異なる円形配置BはA_{+k} $(0\leqq k\leqq T-1)$ のT個であり，命題 3 (3)により同一の最小周期Tをもつ。さらに命題 4 (3)によれば，

- $l=jT$（$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ D$）のとき，各$B$は$l$を周期とするから　$B\in X_\alpha(2\pi jT/N)$
ゆえに　$|X_\alpha(2\pi jT/N)|=T$
- $l\neq jT$ のとき，どのBもlを周期としないから　$|X_\alpha(2\pi l/N)|=0$

したがって，

$$\sum_{l=1}^{N}|X_\alpha(2\pi l/N)|$$

$$=\sum_{j=1}^{D}|X_\alpha(2\pi jT/N)|=\sum_{j=1}^{D}T=DT=N$$

を得るから

$$右辺=\sum_{\alpha}N=NQ=左辺$$

(2)　(1)において，l/Nを既約分数k/dに表すと，

$$NQ=\sum_{d|N}\sum_{k\leqq d,\ k は d と互いに素な自然数}|X(2\pi k/d)|$$

$$=\sum_{d|N}|X(2\pi/d)|\phi(d)\quad(\because 命題 5)$$

$$=\sum_{d|G}|X(2\pi/d)|\phi(d)\quad(\because 命題 6)$$

$$=\sum_{d|G}\frac{(N_1G/d+\cdots\cdots+N_mG/d)!}{(N_1G/d)!\cdots\cdots(N_mG/d)!}\phi(d)$$

（∵命題 6 ）

ここで，dがGの正の約数全体を動くとき，G/dもGの正の約数全体を動くから，dとG/dを入れ替えて

$$=\sum_{d|G}\frac{(N_1d+\cdots\cdots+N_md)!}{(N_1d)!\cdots\cdots(N_md)!}\phi\left(\frac{G}{d}\right)$$

特に，$G=1$ のときは $d=1$ に注意。

［**例題 1 の解答**］

主題 7 (2)を利用。

(1)　$m=2$，$N_1=N_2=1$，$G=2$ の場合。

$$Q=\frac{1}{4}\times\sum_{d|2}\frac{(2d)!}{d!d!}\phi\left(\frac{2}{d}\right)\quad(d=2,\ 1)$$

$$=\frac{1}{4}\times\left\{\frac{4!}{2!2!}\phi(1)+\frac{2!}{1!1!}\phi(2)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\times\{6\times1+2\times1\}=2$$

(2)　$m=3$，$N_1=N_2=N_3=1$，$G=4$ の場合。

$$Q=\frac{1}{12}\times\sum_{d|4}\frac{(3d)!}{d!d!d!}\phi\left(\frac{4}{d}\right)\quad(d=4,\ 2,\ 1)$$

$$=\frac{1}{12}\times\left\{\frac{12!}{4!4!4!}\phi(1)+\frac{6!}{2!2!2!}\phi(2)+\frac{3!}{1!1!1!}\phi(4)\right\}$$

$$=\frac{1}{12}\times\{34650\times1+90\times1+6\times2\}=2896$$

(3)　$G=1$，$m=3$，$N_1=3$，$N_2=4$，$N_3=5$ より

$$Q=\frac{1}{12}\times\frac{12!}{3!4!5!}=2310$$

§5. 補足

［命題８］ 命題７(2)の応用

(1)　１が n 個と２が $n+1$ 個の計 $2n+1$ 個の数からなる円順列の総数 Q は，n 次カタラン数に等しい。

(2)　n と $r\,(n\geqq r)$ が互いに素ならば，${}_n\mathrm{C}_r$ は n の倍数である。

証明　(1)　n と $n+1$ の最大公約数は $G=1$ より，

$$Q=\frac{1}{2n+1}\times\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}=\frac{1}{n+1}\times\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

これは，n 次カタラン数。(参考文献〔２〕(3))

(2)　仮定より，r と $n-r$ は互いに素である。いま，１が r 個と２が $(n-r)$ 個の計 n 個の数からなる円順列の総数 Q は

$$Q=\frac{1}{n}\times\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{1}{n}\times{}_n\mathrm{C}_r$$

よって，${}_n\mathrm{C}_r=nQ$ は n の倍数。

《参考文献》

〔１〕 山田一男著　重複円順列・重複数珠順列について　数研出版　数研通信　68 号

〔２〕 改訂版チャート式基礎からの数学Ⅰ＋Ａ　数研出版

(1)　P512　補足事項

(2)　P482　検討

(3)　P344～P345　参考事項

(広島県　広島市立基町高等学校)