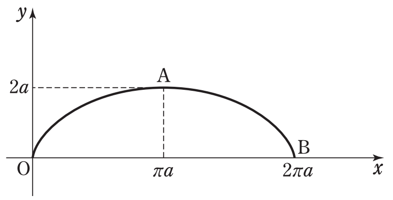
サイクロイドと楕円の比較

伊藤　亘央

§1. サイクロイドと楕円

サイクロイドは楕円によく似ている。しかし実際は別物である。そこで，サイクロイドと楕円の微妙な違いを考察する。



具体的には，$a>0$ に対し，以下の曲線 C と曲線 E を比較する。

端点を原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(2\pi a,\ 0)$，極大点を点 $\mathrm{A}(\pi a,\ 2a)$ とするサイクロイドを曲線 C とする。

線分 OB 上に焦点をもち，O，B を端点，A を極大点として C と共有し，長軸，短軸の長さがそれぞれ $2\pi a$，$4a$ である楕円の $y\geqq 0$ の部分を曲線 E とする。

曲線 C の方程式は

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0\leqq t\leqq 2\pi) \quad \cdots\cdots①$$

ここで，x は t の連続な単調増加関数である。

曲線 E は，点 $(\pi a,\ 0)$ を中心とする半径 πa の円の $y\geqq 0$ の部分を，x 軸を基準に y 軸方向へ $\dfrac{2}{\pi}$ 倍に縮小したものと考える。円の方程式は

$(x-\pi a)^2+y^2=(\pi a)^2$ より　$y^2=x(2\pi a-x)$

$y\geqq 0$ としているから　$y=\sqrt{x(2\pi a-x)}$

これを $\dfrac{2}{\pi}$ 倍することによって，曲線 E の方程式は

$$y=\frac{2}{\pi}\sqrt{x(2\pi a-x)}\ (0\leqq x\leqq 2\pi a) \quad \cdots\cdots②$$

§2. 予想

2 曲線 C，E の比較の突破口として，曲線 C と x 軸とで囲まれた領域の面積 S_C と，曲線 E と x 軸とで囲まれた領域の面積 S_E を比較してみる。

まず，S_C は①より

$$\begin{aligned}S_C&=\int_0^{2\pi a} y\,dx=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt\\&=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt\\&=a^2\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}\\&=3\pi a^2\end{aligned}$$

よって　$S_C=3\pi a^2$

一方，S_E は

$$S_E=\frac{1}{2}\pi\cdot\pi a\cdot 2a=\pi^2a^2$$

S_C と S_E を比べると，$\dfrac{S_E}{S_C}=\dfrac{\pi}{3}\fallingdotseq 1.047$ より，S_E の方が S_C よりわずかに大きい。

このことから，

『2 曲線 C，E について，共有点 O，A，B を除いて常に曲線 E が曲線 C の上方にある』　$\cdots\cdots(*)$

ということが予想される。

しかしながら，この時点では O，A，B 以外に接点や交点がないという保証はできない。本稿の目的はこれを保証することであり，次の §3. で $(*)$ を証明する。

§3. サイクロイドと楕円の比較

§2. で予想した $(*)$ を証明する。

まず，本来サイクロイドというものが，円が定直線に接しながら滑らずに回転する際の円周上の定点が描く軌跡であることから，曲線 C は直線 $x=\pi a$ に関して対称である。曲線 E も明らかに直線 $x=\pi a$ に関して対称である。

これらの対称性から，左半分における，$0 \leqq x \leqq \pi a$ ($\Longleftrightarrow$ $0 \leqq t \leqq \pi$) の範囲で，共有点O，Aを除いて常に曲線Eが曲線Cの上方にあることを証明すれば十分である。

$0 \leqq t \leqq \pi$ なる任意の実数 t をとる。このとき，$x=a(t-\sin t)$ を共通の x 座標とするC上の点 $P_C(x,\ y_C)$とE上の点 $P_E(x,\ y_E)$における y 座標の y_C，y_E を比較する。

$y_C=a(1-\cos t)$

②より $\quad y_E=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{a(t-\sin t)\{2\pi a-a(t-\sin t)\}}$

$$=\frac{2a}{\pi}\sqrt{(t-\sin t)(2\pi-t+\sin t)}$$

$y_C \geqq 0$，$y_E \geqq 0$ より y_C と y_E の大小関係は $\left(\dfrac{\pi}{a}y_C\right)^2$ と $\left(\dfrac{\pi}{a}y_E\right)^2$ の大小関係と同値であるから，

$f(t)=\left(\dfrac{\pi}{a}y_E\right)^2-\left(\dfrac{\pi}{a}y_C\right)^2$ とおき，$f(t)$の符号を調べる。

$$f(t)=4(t-\sin t)(2\pi-t+\sin t)-\pi^2(1-\cos t)^2$$

ここで $\quad f(0)=f(\pi)=0 \quad$ ……③

$$f'(t)=4(1-\cos t)(2\pi-t+\sin t) +4(t-\sin t)(-1+\cos t) -\pi^2\cdot 2(1-\cos t)\sin t$$

これを整理して

$$f'(t)=2(1-\cos t)\{(4-\pi^2)\sin t-4t+4\pi\} \text{……④}$$

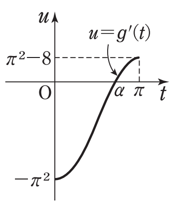
ここで

$1-\cos t \geqq 0$（等号は $t=0$ のときに限る）……⑤

④における{ }内を $g(t)$とおく。

$$g(t)=(4-\pi^2)\sin t-4t+4\pi$$
$$g'(t)=(4-\pi^2)\cos t-4$$

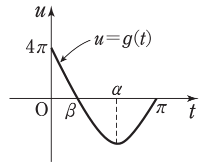
ここで，$g'(\alpha)=0$ ($0<\alpha<\pi$) なる α がただ1つ存在する。



$g(0)=4\pi$，$g(\pi)=0$ より，$g(t)$ ($0 \leqq t \leqq \pi$) の増減表は次のようになる。

t	0	…	α	…	π
$g'(t)$		−	0	+	
$g(t)$	4π	↘		↗	0

増減表より，$g(\beta)=0$ ($0<\beta<\alpha$) なる β がただ1つ存在する。



これと③，④，⑤より，$f(t)$ ($0 \leqq t \leqq \pi$) の増減表は次のようになる。

t	0	…	β	…	π
$f'(t)$	0	+	0	−	0
$f(t)$	0	↗		↘	0

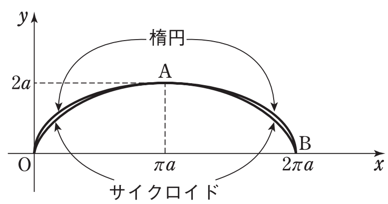
増減表より，$0 \leqq t \leqq \pi$ で，常に $f(t) \geqq 0$，等号は $t=0$，π のときに限る。いい換えると，x が t の連続な単調増加関数であることから，$0 \leqq x \leqq \pi a$ で，常に $y_E \geqq y_C$，等号は $x=0$，πa のときに限る。したがって，2点 P_C，P_E については，共有点O，Aでの一致を除いて常に P_E が P_C の上方にある。

以上は左半分の $0 \leqq x \leqq \pi a$ の範囲であったが，対称性より右半分も含めて，結局 $0 \leqq x \leqq 2\pi a$ の範囲で，共有点O，A，Bを除いて常に曲線Eが曲線Cの上方にあるということになる。

以上より，§2.の(＊)が証明された。

§4. 結論

サイクロイドの x 軸上の端点をO，B，極大点をAとする。線分OB上に焦点をもち，O，Bを端点，Aを極大点としてサイクロイドと共有する楕円は，3共有点O，A，Bを除いて常にサイクロイドの上方にある。



《参考文献》

〔1〕 数研出版 数学Ⅲ

（愛知県 名古屋国際中学校・高等学校）