2重根号を含む不等式評価の授業実践

中出（なかで）　公平（こうへい）

§1. はじめに

2020年に大学入試が改革されます。今まで以上に授業で学んだ知識を実生活で活用する能力が求められます。そのような側面から，近似値，すなわち不等式の評価方法は問題や解答作成上必要不可欠な要素であると考えています。生徒自身も今まで以上に習熟しなければならない分野です。

§2. 合同授業

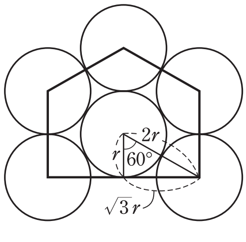
本校では，1月下旬に理系を希望しているアドバンストクラス(特進クラス)の1年生と，現アドバンスト理系クラスの2年生の約80名で 50分×2時間＝100分を用いて合同授業が行われます。

昨年で2回目の開催になりますが，1年生2名，2年生2名の4人1組のグループで学び合う貴重な機会です。教材は,「コンビニで数学しよう―リョータ君の数学日誌から」という本を参考にして,「ドラム缶6本の側面をロープで結ぶ最短経路で並べる方法を数式で表しなさい。」という問題を考察させ，話をふくらまそうと考えました。

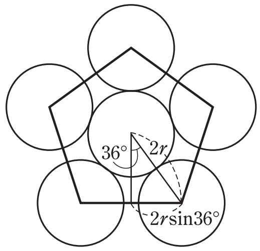
せっかくの機会を，楽しく活動してもらいたかったので，スケールダウンして各グループにドラム缶に見立てた缶コーヒーを6本ずつ与えました。なお，ひもは与えず，自由に想像しながら缶を並べ替えながら活動してもらいました。ほとんどのグループが円の半径をrと設定して考えていたので，以下，円の半径をrとおいて話を進めます。

缶コーヒーをいろいろな形に並び変えて考察すると，ひもの曲線部分の合計はどの並べ方も$2\pi r$と一定であることをグループ内で発見して，最短距離というのは外接した円の中心間の距離を測定すればよいことに気づき始めます。ほとんどの6本の並べ方は$(8+2\pi)r$なのに対して，最短経路は(図1)のような並べ方になることに生徒は気づきはじめ，到達度の高いグループに$(8+2\sqrt{3})r$となることを黒板の前に出てきて発表してもらいました。

その後，私は「この並べ方は短くなりませんか」と(図2)のような提案をしました。生徒は直感的に(図2)の方が長いと感じます。しかしながら私が「数式で説明してください」と問うと，$20r\sin 36^\circ$と気付いたグループもありましたが，ここで活動が打ち切りになりました。



(図1)
$(8+2\sqrt{3})r$



(図2)
$20r\sin 36^\circ$

黄金比や$\sin 36^\circ$の話に関する資料を配付し，1年生は未習の2倍角や3倍角の公式に関しても触れました。ここで授業を終了しても良かったのですが，もう少し踏み込んで

$$\sin 36^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$ より，両辺を20倍して

$$20r\sin 36^\circ=5\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,r$$ なので

$r>0$ よりrを考えずに(図1)が(図2)と比べると線分が短いと仮定して

$$8+2\sqrt{3}<5\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

を不等式で証明できないかと彼らに提案しました。

2重根号と根号の評価方法は数Ⅰで学んでいますし，不等式の証明も本校の1年生は既習です。

1年生と2年生がグループで，2重根号がはずせないときにどうしたらよいのかの議論を期待していたのですが，途方に暮れるグループが多かったのが現状でした。そして，このような問題に対して，授業で学んだ知識を活用して解決する力を育むことが今回の大学入試の骨子だとも感じました。

§3. 期待していた解答例

少しでも挑戦して，例えば，

$2\sqrt{5}=\sqrt{20}$ より

$\sqrt{16}<\sqrt{20}<\sqrt{25}$ なので $4<2\sqrt{5}<5$

各辺 -1 を掛けて 10 を加えると

$5<10-2\sqrt{5}<6$

各辺正の数であるから，$\sqrt{5}<\sqrt{10-2\sqrt{5}}<\sqrt{6}$ より

$5\sqrt{5}<5\sqrt{10-2\sqrt{5}}<5\sqrt{6}$

いま，$\sqrt{125}<5\sqrt{10-2\sqrt{5}}<\sqrt{150}<\sqrt{169}$ であるから $11<5\sqrt{10-2\sqrt{5}}<13$

他方，$2\sqrt{3}=\sqrt{12}$ より $\sqrt{9}<\sqrt{12}<\sqrt{16}$ であるから $3<2\sqrt{3}<4$

$11<8+2\sqrt{3}<12$

で評価が粗いことで手詰まりになります。このような解答を期待していましたが，皆無でした。

§4. 2つの解法

私がプリントで配付した2つの証明方法を紹介します。生徒も納得しやすいものです。

(解 1) 小数第1位の根号で評価する

$19.36<20<20.25$ より

$\sqrt{19.36}<\sqrt{20}<\sqrt{20.25}$

$\sqrt{(4.4)^2}<2\sqrt{5}<\sqrt{(4.5)^2}$

よって　$4.4<2\sqrt{5}<4.5$

両辺に -1 を掛けて 10 を加えると

$5.5<10-2\sqrt{5}<5.6$

各辺正の数であり，抜き出して

$\sqrt{5.5}<\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

よって　$5\sqrt{5.5}<5\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

ここで

$$11.5=\sqrt{(11.5)^2}=\sqrt{132.25}<\sqrt{137.5}$$
$$=5\sqrt{5.5}<5\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

となり　$11.5<5\sqrt{10-2\sqrt{5}}$　……①

他方で

$8+2\sqrt{3}=8+\sqrt{12}<8+\sqrt{(3.5)^2}=11.5$　……②

①，②より　$8+2\sqrt{3}<5\sqrt{10-2\sqrt{5}}$　■

根号内が整数で評価が粗いのならば，小数点で評価しましょう。という単純な話です。生徒も納得したようです。

(解 2) A^2-B^2 の評価

$$(5\sqrt{10-2\sqrt{5}})^2-(8+2\sqrt{3})^2$$
$$=25(10-2\sqrt{5})-(64+32\sqrt{3}+12)$$
$$=250-50\sqrt{5}-78-32\sqrt{3}$$
$$=172-50\sqrt{5}-32\sqrt{3}$$

$(112^2=12544,\ 56^2=3136$ とあたりをつけます)

$$=172-\sqrt{12500}-\sqrt{3072}>172-\sqrt{12544}-\sqrt{3136}$$
$$=172-112-56=4>0$$

よって　$(5\sqrt{10-2\sqrt{5}})^2>(8+2\sqrt{3})^2$

$5\sqrt{10-2\sqrt{5}}>0,\ 8+2\sqrt{3}>0$ より

$8+2\sqrt{3}<5\sqrt{10-2\sqrt{5}}$　■

A^2-B^2 はなるほどという顔をしてくれるのですが，生徒は 112^2 と 56^2 の数値を出すと腑に落ちない顔をします。試行錯誤して値を見つけ出すことの作業に慣れていないのだと思います。

§5. まとめ

上記の証明を作っているときに，2003 年に東京大学で出題された「円周率は 3.05 より大きいことを証明せよ」という入試問題を思い出しました。合同授業終了後，改めてこの問題を思い返すと作成者の意図はこれまで私が考えていた以上に深いものがあったように感じられました。上記のような問題は現在の入試問題ではあまり見かけません。しかしながら今回の大学入試改革を機に，増加していくことになると私は予想しています。今回の一件で，生徒よりも私自身がたくさんのことを学べたような気がしました。生徒に感謝します。

《参考文献》

〔1〕「コンビニで数学しよう―リョータ君の数学日誌から―」
秋山仁(監修)黒澤敏明(著)小林淑訓(著)
直川朗(著)小野寺真也(著)杉浦忠雄(著)
森北出版

(石川県立小松明峰高等学校)