両替の問題

高木（たかぎ）　勝久（かつひさ）

§1. 生徒の質問から

先日，次の問題について生徒から質問を受けた。

> (問題集「4 STEP　数学Ⅰ＋A」 p.93)
> 次の場合，硬貨の一部または全部を使って，支払うことのできる金額は何通りあるか。
> (1)　10 円硬貨 4 枚，50 円硬貨 1 枚，100 円硬貨 3 枚
> (2)　10 円硬貨 2 枚，50 円硬貨 3 枚，100 円硬貨 3 枚
> (3)　10 円硬貨 7 枚，50 円硬貨 1 枚，100 円硬貨 3 枚

生徒の質問は(2)についてであった。曰く，(1)は自力では解けなかったが問題集の解答編を読んで

$$5\times2\times4-1=39\ (\text{通り})$$

で正答が得られることは理解できた。しかし，(2)は解答編では100 円硬貨 3 枚を 50 円硬貨 6 枚と考えてから(1)と同様に立式して

$$3\times10-1=29\ (\text{通り})$$

としており，二重下線部が納得いかないのだという。この両替でなぜ正答を得られるのか，このようにしなければ正答を得られないのか，この両替をどのようにして思いついたのか。疑問だらけの様子であった。実際，本問は解答編とは異なる両替，すなわち高額面の硬貨をできるだけ多くする両替により 10 円硬貨 2 枚，50 円硬貨 1 枚，100 円硬貨 4 枚としても

$$3\times2\times5-1=29\ (\text{通り})$$

と正答を得られるが，これについての記述は解答編にはない。

さらに解答編を読み進めると，(3)では所持金のすべてを最低額面の 10 円硬貨に両替して正答を得ている (420 円→ 10 円硬貨 42 枚　∴42 通り) が，この解法では(1)では正答を得られるが(2)では得られない。(1)(2)(3)の解答で一貫した方針が一見ではわからず，生徒の混乱はピークに達していた。「(1)(2)(3)はすべて違う問題なんですか？！」「それをどこでどうやって見分けるんですか。私には無理です」という訳である。

§2. 本問の構造

本問では硬貨の種類は 10 円硬貨，50 円硬貨，100 円硬貨の 3 種である。このとき，支払うことができる金額の数え上げ方は，それらの枚数の組み合わせにより次の 2 通りがある。

- **積の法則を用いる**

  条件Ａ：
  　10 円硬貨の合計金額≦40 円，かつ
  　10 円硬貨と 50 円硬貨の合計金額≦90 円
  を満たしていれば，各硬貨の枚数の組が異なると必ず異なる支払金額となる。よって，各硬貨の枚数の組を積の法則から求めることで正答が得られる。

- **所持金合計額から算出する**

  条件Ｂ：
  　10 円硬貨の合計金額≧40 円，かつ
  　10 円硬貨と 50 円硬貨の合計金額≧90 円
  を満たしていれば，「所持金合計額より小さいが支払えない」金額が 10 円単位で考えたときに存在しない。よって，所持金合計額を計算することで正答が得られる。

平たく言うと，条件Ａとは「額面の低い硬貨の枚数が十分に少ない」，条件Ｂとは「額面の低い硬貨の枚数が十分に多い」ことである。

解答編の記述は，これらを踏まえた上で，本問を次のように考察した結果のものと私は考えている。

① ⑴について。各硬貨の枚数から，条件 A，条件Bをともに満たしている。積の法則でも所持金合計額からも正答の 39 通りが得られる。解答編では積の法則を用いて正答を得ている。

② ⑶について。各硬貨の枚数から条件Bを満たしており，所持金合計額 420 円より 42 通りとして正答が得られる。このことを，解答編では「所持金のすべてを最低額面の 10 円硬貨に両替する」と表現している。

③ ⑵について。各硬貨の枚数が

10 円硬貨の合計金額＜40 円…㋐，かつ

10 円硬貨と 50 円硬貨の合計金額＞90 円…㋑

となっており，条件Aと条件Bをともに満たしていない。㋐, ㋑のいずれかの不等号の向きを変える必要がある。㋐の不等号の向きを変えるために両替で 10 円硬貨の枚数を増やすと，支払うことができる金額が増えて正答が得られないので，㋑の不等号の向きを変えることを考える。

④ 方法の 1 つは，50 円硬貨の枚数を減らすことである。10 円硬貨の枚数を変えずに

50 円硬貨 3 枚，100 円硬貨 3 枚を

50 円硬貨 1 枚，100 円硬貨 4 枚とする

両替をすれば，支払うことができる金額は変わらず，かつ 50 円硬貨の枚数が減って，㋑の不等号の向きが変わり条件Aを満たすので，積の法則により

$$3\times2\times5-1=29\text{（通り）}$$

と正答が得られる。

⑤ 他の両替法も考えられる。

50 円硬貨 3 枚，100 円硬貨 3 枚を

50 円硬貨 9 枚，100 円硬貨 0 枚とする

として，10 円硬貨と 50 円硬貨のみの問題とすることである。

この場合も支払うことができる金額は変わらず，50 円硬貨に対して 10 円硬貨が十分に少ない（10 円硬貨の合計金額≦40 円）ので条件Aを満たしていることに相当する。よって積の法則で

$$3\times10-1=29\text{（通り）}$$

と正答が得られる。解答編ではこの方針での解答が掲載されている。

⑥ ⑤の方法は積の法則で正答を算出する立式をしているが，その事前処理の両替は 50 円硬貨と 100 円硬貨について「より低い額面である 50 円硬貨にすべて両替する」ものであるから，②で触れた解答編⑶の記載と同様で条件Bを満たすように両替していると解釈することも可能である。よって解答編に掲載の解法は積の法則による算出法と所持金合計額による算出法が融合したものといえる。

まとめると，解答編ではそれぞれの小問に対し，

⑴ 積の法則

⑵ 積の法則と所持金合計額の融合

⑶ 所持金合計額

を用いた解法が掲載されている。この構造が見えなかったために，生徒は混乱したのではないか。

《参考文献》

〔1〕 数研出版，4 STEP 数学Ⅰ＋A

（兵庫県 神戸大学附属中等教育学校）