2次曲線のベクトル方程式

久末（ひさすえ）　正樹（まさき）

§0. はじめに

数学Bのベクトルの後半で平面のベクトル方程式を学びますが，そこでは次のような図形についてのベクトル方程式が登場します。

(1) 点 $A(\vec{a})$ を通り，$\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$

(2) 2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式
$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

(3) 点 $A(\vec{a})$ を通り，法線ベクトルが $\vec{n}$ である直線のベクトル方程式　$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$

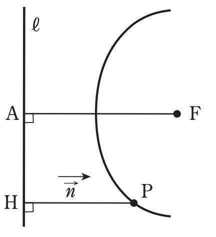
(4) 中心 $C(\vec{c})$，半径 r の円のベクトル方程式
$|\vec{p}-\vec{c}|=r$

(5) 2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を直径とする円のベクトル方程式　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

§1. 2次曲線のベクトル方程式

ベクトルの単元を学ぶ前までに，直線，2次関数，指数関数など様々な関数を学ぶわけですが，ベクトル方程式においては直線と円しか登場しないので，ここでは2次曲線のベクトル方程式については，どのような形で書けるのか考えてみました。

2次曲線の焦点をF，その位置ベクトルを $\vec{f}$ とします。また焦点Fから準線 ℓ に引いた垂線の足を $A(\vec{a})$ とします。曲線上の任意の点を $P(\vec{p})$ とし，Pから準線 ℓ への垂線の足をHとします。また準線の単位法線ベクトルで $\overrightarrow{HP}$ と向きが同じものを $\vec{n}$ とします。



e を離心率とすると，2次曲線の定義より次の式が成り立ちます。

$$\frac{FP}{PH}=e \quad \cdots\cdots☆$$

ただし，$0<e<1$ のとき楕円を，$e=1$ のとき放物線を，$e>1$ のとき双曲線を表します。

内積の定義より，

$$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PA}=|\overrightarrow{PH}||\overrightarrow{PA}|\cos\angle APH=|\overrightarrow{PH}|^2$$

であるから

$$|\overrightarrow{PH}|=\frac{\overrightarrow{PH}}{|\overrightarrow{PH}|}\cdot\overrightarrow{PA}$$

が成り立ちます。一方，定義より $\vec{n}=-\dfrac{\overrightarrow{PH}}{|\overrightarrow{PH}|}$ であるから，$|\overrightarrow{PH}|=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}$ となります。よって，☆より

$$|\overrightarrow{FP}|=e\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}$$

すなわち，

$$\boxed{e\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=|\vec{p}-\vec{f}|} \quad \cdots\cdots☆☆$$

が成り立ちます。

どのような形の式で表すのが最も収まりがいいのかわかりませんが，これが得られた2次曲線のベクトル方程式です。

§2. 具体例

次に，具体的な例で調べてみます。

例1　$e=1$，$F(p,\ 0)$，$P(x,\ y)$，準線 $x=-p$ のとき
$\vec{n}=(1,\ 0)$，$A(-p,\ 0)$ であり，
$\vec{p}-\vec{f}=(x-p,\ y)$，$\vec{p}-\vec{a}=(x+p,\ y)$ であるから，☆☆により

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=x+p$$

が成り立ち，整理して $y^2=4px$ となり放物線が得られます。

例 2　$e>0$，$e\neq 1$，$\mathrm{F}(ep,\ 0)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$，準線 $x=-p$ のとき
$\vec{n}=(1,\ 0)$，$\mathrm{A}(-p,\ 0)$ であり，
$\vec{p}-\vec{f}=(x-ep,\ y)$，$\vec{p}-\vec{a}=(x+p,\ y)$ であるから，☆☆により

$$\sqrt{(x-ep)^2+y^2}=e(x+p)$$

が成り立ち，

$$(1-e^2)x^2-2e(1+e)px+y^2=0$$

となり，これを整理すると

$$(1-e^2)\left(x-\frac{ep}{1-e}\right)^2+y^2=\frac{(1+e)e^2p^2}{1-e}$$

となります。これは $0<e<1$ のときは楕円を，また $e>1$ のときは双曲線を表しています。

§3. $e\longrightarrow 0$，∞ の場合

$e\longrightarrow 0$ のときは☆により $\mathrm{PH}\longrightarrow\infty$ になるということであるから，楕円での準線を無限遠方においた極限とみなして円を表すことが知られています。
では $e\longrightarrow\infty$ のときはどうなるでしょうか。この場合は☆の式から $\mathrm{PH}\longrightarrow 0$ ということであるから，PとHが同一点，すなわちPは準線 ℓ 上を動くということになります。
実際，☆☆の式を変形すると，

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=\frac{1}{e}|\vec{p}-\vec{f}|$$

であり，$e\longrightarrow\infty$ であるから右辺は 0 になるので，

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$

となり，この式は§0 の(3)で紹介した「点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，法線ベクトルが $\vec{n}$ である直線のベクトル方程式」とまったく同じ式になっています。結局，以上の考察により e の値によって次のように分類することができました。

(i)　円　($e\longrightarrow 0$ のとき)
(ii)　楕円　($0<e<1$ のとき)
(iii)　放物線　($e=1$ のとき)
(iv)　双曲線　($1<e<\infty$ のとき)
(v)　準線　($e\longrightarrow\infty$ のとき)

§4. 結びに

初めは 2 次関数のグラフのベクトル方程式を調べていましたが，試行錯誤を重ねるうちに，離心率を利用すれば 2 次曲線のベクトル方程式を統一的に求めることができるのではと考えました。結果的に§0 の(3)の式に近い形になったので，e の値により分類することができました。今後はさらに他の曲線についても考えていきたいと思います。

(北海道立 旭川東高等学校)