ピタゴラス数をつくる

木村（きむら）　嘉宏（よしひろ）

§1. はじめに

三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$ を成り立たせる 3 つの自然数 a，b，c の組をピタゴラス数という。言うまでもなく，ピタゴラス数は直角三角形の 3 辺の長さを表している。たとえば，
$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5)$，$(5,\ 12,\ 13)$，$(8,\ 15,\ 17)$ などは簡単なピタゴラス数であり，中学生にもなじみ深いものであろう。

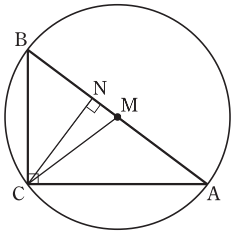
また，$m>n$ である自然数 m，n に対して，一般的に $(a,\ b,\ c)=(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2)$ はピタゴラス数であることが知られている。

§2. ピタゴラス数からピタゴラス数をつくる

ところで，ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$ に対して適当な x，y をとると，$(x,\ y,\ c^2)$ もまたピタゴラス数になる。これを繰り返し利用すると，斜辺が c である直角三角形を表すピタゴラス数から，斜辺が c^2，c^4，c^8，…… である直角三角形を表すピタゴラス数を無限につくり出すことができる。

このことを中学生にも理解できるように解説し，簡単なピタゴラス数から難解なピタゴラス数を導き出してみよう。

まず，具体的な例を使って，基本的な手順を示す。



図の直角三角形 ABC において，BC＝3，CA＝4，AB＝5 であるとする。また，辺 AB の中点を M とする。このとき M は外心である。さらに，点Cから AB へ下ろした垂線の足をNとすると，直角三角形 CMN において

$$\mathrm{MN}=\frac{5}{2}-3\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{10},\ \mathrm{NC}=3\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{5},\ \mathrm{CM}=\frac{5}{2}$$

$\frac{7}{10}$，$\frac{12}{5}$，$\frac{5}{2}$ にそれぞれ 10 を掛けると 7，24，25 となり，(7，24，25) はピタゴラス数である。

一般に ∠C が直角，BC が最も短い辺である直角三角形 ABC について，辺 AB の中点を M，点Cから AB に下ろした垂線の足を N，BC＝a，CA＝b，AB＝c とすると，直角三角形 CMN において

$$\mathrm{MN}=\frac{c}{2}-a\cdot\frac{a}{c}=\frac{c^2-2a^2}{2c},\ \mathrm{NC}=a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c},$$

$$\mathrm{CM}=\frac{c}{2}$$

$\frac{c^2-2a^2}{2c}$，$\frac{ab}{c}$，$\frac{c}{2}$ にそれぞれ $2c$ を掛けると c^2-2a^2，$2ab$，c^2 となり，$(c^2-2a^2,\ 2ab,\ c^2)$ はピタゴラス数である。したがって，

> ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$ について，
> $x=c^2-2a^2$，$y=2ab$ とすると $(x,\ y,\ c^2)$ もまたピタゴラス数である。（ただし，$a<b$ とする。）

§3. 大きなピタゴラス数を求める

§2 で得られたことを繰り返し利用すると，次に示すように，簡単なピタゴラス数から難解なピタゴラス数をつくり出すことができる。

(3，4，5) → (7，24，25) → (336，527，625)
→ (164833，354144，390625)

(5，12，13) → (119，120，169)
→ (239，28560，28561)
→ (13651680，815616479，815730721)

(8，15，17) → (161，240，289)
→(31679，77280，83521)
→(4896306240，4968639359，6975757441)

（京都府立峰山高等学校弥栄分校）