平方完成を用いずに 2 次関数のグラフをかく方法

増井（ますい）　貴明（たかあき）　　筒井（つつい）　洸宇（ひろたか）

§1. はじめに

2 次関数の一般形 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ のグラフをかくために，平方完成を用いて標準形 $y=a(x-p)^2+q$ へ式変形をすることを苦手としている生徒は多いと考えられます。本稿では，より 2 次関数の特性を生徒に意識させながら一般形のグラフを習得させることを目的として，平方完成を用いない方法を紹介します。なお，事前知識として，次のことを生徒が理解しているものとします。

- 標準形 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフのかき方
- 定数項 c はグラフの y 切片を表すこと
- 2 次関数のグラフは軸で線対称(放物線)であること
- $A\times B=0$ ならば $A=0$ または $B=0$ であること

§2. 平方完成を用いない方法

筆者の方法のキーワードは，「必ずもつ y 切片の値に注目し，グラフの対称性を利用する」というものです。以下にいくつか例をあげます。

例 1． $y=-x^2+4x+2$ のグラフ

【解答】

y 切片は 2 なので，$2=-x^2+4x+2$ を解く。

$-x^2+4x=0$ より，

$x(x-4)=0$ だから，$x=0,\ 4$

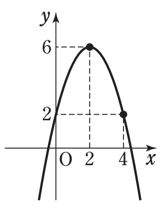
対称性より，軸は $x=\dfrac{4}{2}=2$

である。

$x=2$ を代入して

$$y=-2^2+4\cdot 2+2=6$$

ゆえに，頂点は$(2,\ 6)$である。



例 2． $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x+2$ のグラフ

【解答】

y 切片は 2 なので，$2=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x+2$ を解く。

$\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x=0$ より，$3x^2+2x=0$

$x\left(x+\dfrac{2}{3}\right)=0$ だから，$x=0,\ -\dfrac{2}{3}$

対称性より，軸は $x=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}$ である。

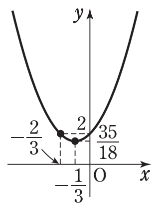
$x=-\dfrac{1}{3}$ を代入して

$$y=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+2$$

$$=\frac{35}{18}$$

ゆえに，頂点は$\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{35}{18}\right)$

である。



例 3． $y=-2x^2-1$ のグラフ

【方針】 この形は既習の $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ($p=0$ の場合)でかく方がよいでしょう。筆者の方法でも次のように導けますが，グラフを確定させるために追加の 1 点が必要となります。

【解答】

y 切片は -1 なので，$-1=-2x^2-1$ を解く。

$-2x^2=0$ より，$x=0$

(便宜的に $x=0,\ 0$ もよい)

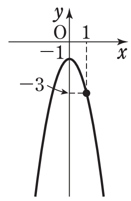
対称性より，軸は $x=\dfrac{0}{2}=0$

である。

$x=0$ を代入して

$$y=-2\cdot 0-1=-1$$

ゆえに，頂点は$(0,\ -1)$である。



まとめると，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ に対して，次のようなステップになります。

Ⅰ　y 切片の値を代入した 2 次方程式 $c=ax^2+bx+c$ を解く。 Ⅱ　Ⅰの解を用いて，グラフの対称性より，軸の方程式を求める。 Ⅲ　Ⅱの値をもとの式に代入して頂点を求める。

なお，筆者の方法においては，以下の点に関して特に有用性があると考えられます。

(1)　**グラフの情報の段階的導出**

グラフをかくために必要な情報である y 切片，軸の方程式，頂点が段階的に求められます。したがって，ステップが進むごとにグラフの完成がイメージしやすいメリットがあると考えられます。頂点の y 座標まで必要としないような場合においては，軸の方程式までの計算にとどめておくことも可能です。また，見逃されやすい y 切片の値も意識させやすいと考えられます。

(2)　**ステップⅠで解く 2 次方程式**

平方完成を苦手とする理由のひとつには，主係数の値による計算の複雑性が挙げられます。主係数が 1 以外の値の場合に必要となる処理のために，計算ミスが多発する問題です。筆者のステップⅠで扱う 2 次方程式は実質 $ax^2+bx=0$ ですから，必要に応じて定数倍することで，主係数の分数およびマイナス係数を回避することが可能です。

§3. 数学的な厳密性

筆者の方法では，ステップⅡで，グラフの対称性(放物線の特性)を用いることで軸の方程式を求めました。しかし，「すべての一般形のグラフが必ず放物線になり得るか」という問題については，このままでは保証されていません。平方完成では，式変形

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}$$

によって，そのことが保証されています。したがって，筆者の方法を扱う際には，厳密には以下のような別途証明を与える必要があります。

2 つの多項式の集合 S，S' を

$$S=\{ax^2+bx+c\,|\,a,\ b,\ c \text{ は実数}\},$$
$$S'=\{a'(x-p)^2+q\,|\,a',\ p,\ q \text{ は実数}\}$$

で定義します。このとき，$S=S'$ が成り立つことを示します。

【証明】

($S'\subset S$ であること)

$$\begin{aligned}a'(x-p)^2+q&=a'x^2-2a'px+a'p^2+q\\&=a'\cdot x^2+(-2a'p)\cdot x+(a'p^2+q)\end{aligned}$$

より，$\begin{cases}a'=a\\-2a'p=b\\a'p^2+q=c\end{cases}$　……($*$)

と置き換えることで，$S'\subset S$ が示されます。

($S\subset S'$ であること)

上の連立方程式($*$)を解くと，

$$p=-\frac{b}{2a},\ q=c-ap^2=c-\frac{b^2}{4a}$$

であることから，$S\subset S'$ が示されます。

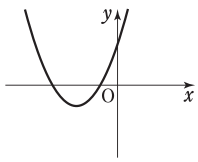
したがって，$S=S'$ となります。

集合の等号成立に関する証明は，単純な要素の比較を除いてほとんど扱われていません。実数の性質や 3 元連立方程式の練習問題として生徒に触れさせてみるのも良いかもしれません。

§4. 大学入学共通テストとの関係

最後に，昨年 12 月に大学入試センターが公表した大学入学共通テスト(以下，新テスト)の試行調査で出題された問題に触れておきたいと思います。

下の図が $y=ax^2+bx+c$ のグラフを表すとき，係数 a，b，c の組合せとして適切なものを選べ。



	a	b	c
⓪	2	1	3
①	2	-1	3
②	-2	3	-3
③	$\frac{1}{2}$	3	3
④	$\frac{1}{2}$	-3	3
⑤	$-\frac{1}{2}$	3	-3

この問題は，正答率が 51.5% であったことからも，多くの高校生を悩ませた問題だったと推測されます。平方完成に馴染みのある生徒の中には，選択肢を順番に検証した者もいるかもしれません。筆者の方法を用いることで次のように解くことも可能ではないでしょうか。

【解答】

y 切片が正であり，グラフが下に凸である。

……選択肢⓪，①，③，④

また，グラフの軸が負であることから，2 次方程式 $ax^2+bx=0 \Longleftrightarrow x\left(x+\dfrac{b}{a}\right)=0$ を考えて a と b は同符号である。

……選択肢⓪，③

⓪のとき，軸の方程式は $x=-\dfrac{1}{4}$ であり，頂点の y 座標は，$y=2\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{4}\right)+3>0$ より，不適。

③のとき，軸の方程式は $x=-3$ であり，頂点の y 座標は，$y=\dfrac{1}{2}\cdot(-3)^2+3\cdot(-3)+3<0$ より条件を満たす。よって，答えは　③

§5. おわりに

本稿では，2 次関数の一般形のグラフをかく方法として，平方完成を用いない方法について紹介しました。平方完成は非常に強力なツールではありますが，その反面，2 次関数の一般形のグラフは多くの生徒がつまずく箇所でもあります。一方，筆者の方法は，グラフの情報が段階的に計算できる点や主係数による複雑性を回避できる点から，生徒の実態に合わせて実践できるのではないかと考えています。

さらに，新テストの問題から見られるように，今後はこれまでのスタイル・指導法では適応することが難しい可能性も考えられます。今後もさまざまな指導法を模索し続けたいと考えています。

（兵庫県立有馬高等学校定時制）