生徒の興味・関心を引く題材
～反復試行の確率と条件付き確率～

西元（にしもと）　教善（のりよし）

§1. はじめに

生徒が「おやっ？」とか，「何だか面白そうだ！」と思って食指を動かせるような題材，つまり数学的な活動を自発的にするような題材を見出すことは教育効果を上げるうえで大切である。

一般に，数学の問題の設定はどこか現実とのずれがあることが少なくない。たとえば，確率の問題で，袋に赤玉を 4 個，白玉を 6 個入れて，そこから 1 個を取り出して……という設定があるが「誰がそんなことをしますか！もっと面白く，実際にするような設定はないのですか！」と生徒に一蹴されることもある。そこで，同じ確率の問題でも，次のように展開してみたらどうであろうかと思った次第である。

「a 君は硬貨を投げて表が出たら時計の針を 1 時間進め，裏が出たら 1 時間遅らせるといういたずらをします。硬貨を 16 回投げ，時計の針にこのようないたずらをするとき，いたずらをしたにもかかわらず時計が正しい時刻を示す確率を求めてみましょう。

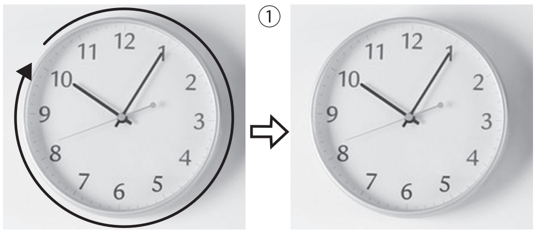
また，時計が正しい時刻を示したとき，実は 12 時間遅れである確率を求めてみましょう。」

あるいは，「a 君と b さんがじゃんけんをして，a 君が勝つときには 1 時間進め，b さんが勝つときには 1 時間遅らせ，あいこのときはそのままにしておくといういたずらをします。a 君と b さんがじゃんけんを 14 回して，時計の針にこのようないたずらをするとき，いたずらをしたにもかかわらず時計が正しい時刻を示す確率を求めてみましょう。また，いたずらをしたにもかかわらず正しい時刻を示したとき，実は 12 時間進んでいる確率を求めてみましょう。」

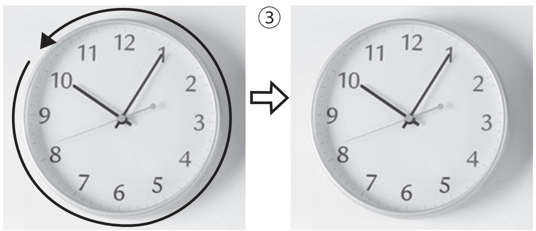
このように遊び的な設定で，意外なことを題材にすると，反復試行の確率，条件付き確率の問題が楽しく取り組めるのではないかと思う。

§2. いたずら 1　～ 1 人で硬貨を投げて～

a 君は硬貨を投げて表が出たら時計の針を 1 時間進め，裏が出たら 1 時間遅らせる。硬貨を 16 回投げ，時計の針にこのようないたずらをするとき，いたずらをしたにもかかわらず時計が正しい時刻を示す確率と，正しい時刻を示したとき，実は 12 時間遅れであるという条件付き確率を求めてみる。



12 時間進んで正しい時刻



12 時間遅れて正しい時刻

この場合，時計の針が正しい時刻を示すのは，

① 針を本来の時刻より 12 時間進めるとき，

② 針が本来の時刻を示す位置に戻るとき，

③ 針を本来の時刻より 12 時間遅らせるとき

の 3 つの場合がある。

時計の針が正しい時刻を示す事象をA，①，②，③の事象をそれぞれA_1，A_2，A_3とすると，これらは互いに排反であり，和事象はAとなる。
つまり，$A=A_1\cup A_2\cup A_3$，$A_1\cap A_2=\varnothing$，$A_2\cap A_3=\varnothing$，$A_3\cap A_1=\varnothing$ である。
したがって，$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$ である。

また，12時間遅れである事象をBとすると，$B=A_3$ である。すると，$B=A_3\subset A$ であるから，$A\cap B=B=A_3$ である。よって，正しい時刻を示したとき，実は12時間遅れである確率は，条件付き確率 $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{P(A_3)}{P(A)}$ である。

では，$P(A_1)$，$P(A_2)$，$P(A_3)$を求めてみよう。

$P(A_1)$について

ａ君が投げた16回のうち，表がx回，裏がy回であるとすると　$x+y=16$　……①

また，表1回について1時間進め，裏1回について1時間遅らせ，16回の試行で12時間遅れることから

$1\cdot x+(-1)\cdot y=-12$　つまり $x-y=-12$　……②

である。
①，②より $x=2$，$y=14$ である。

表が出る確率，裏が出る確率はともに$\dfrac{1}{2}$であること，それを16回反復している中で，表がちょうど2回，したがって裏がちょうど14回出ればよいので，その確率は反復試行の確率から

$$P(A_1)=\frac{16!}{2!14!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{14}=\frac{16\cdot15}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^{16}}=\frac{15}{2^{13}}$$
$$\fallingdotseq 0.0018$$

である。

$P(A_2)$について

ａ君が投げた16回のうち，表がx回，裏がy回であるとすると　$x+y=16$　……①
また，表1回について1時間進め，裏1回について1時間遅らせ，16回の試行で進みも遅れもないことから

$1\cdot x+(-1)\cdot y=0$　つまり　$x=y$　……③ である。
①，③より $x=8$，$y=8$ である。

表が出る確率，裏が出る確率はともに$\dfrac{1}{2}$であること，それを16回反復している中で，表と裏がちょうど8回ずつ出ればよいので，その確率は反復試行の確率から

$$P(A_2)=\frac{16!}{8!8!}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^8$$
$$=\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^{16}}$$
$$=\frac{6435}{2^{15}}\fallingdotseq 0.196$$

である。

$P(A_3)$について

ａ君が投げた16回のうち，表がx回，裏がy回であるとすると　$x+y=16$　……①

また，表1回について1時間進め，裏1回について1時間遅らせ，16回の試行で12時間進むことから

$1\cdot x+(-1)\cdot y=12$　つまり　$x-y=12$　……③

である。
①，③より $x=14$，$y=2$ である。

表が出る確率，裏が出る確率はともに$\dfrac{1}{2}$であること，それを16回繰り返すとき，表がちょうど14回，したがって裏がちょうど2回出ればよいので，その確率は反復試行の確率から

$$P(A_3)=\frac{16!}{14!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{14}=\frac{16\cdot15}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^{16}}$$
$$=\frac{15}{2^{13}}\fallingdotseq 0.0018\ (=P(A_1))$$

よって　$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$
$$=\frac{15}{2^{13}}+\frac{6435}{2^{15}}+\frac{15}{2^{13}}=\frac{6555}{2^{15}}$$
$$=\frac{6555}{32768}\fallingdotseq 0.200$$

ここでわかることは，硬貨を投げて表が出たら1時間進め，裏が出たら1時間遅らせるといういたずらを16回したとき，本来の時刻にぴったり一致する確率は約0.2であること，また，12時間進んで，あるいは12時間遅れて時刻としては正確に表していることになる確率はそれぞれ約0.0018であり，極めて低いということである。

また，正しい時刻を示したとき，実は12時間遅れである確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A_3)}{P(A)}=\frac{\dfrac{15}{2^{13}}}{\dfrac{6555}{2^{15}}}=\frac{60}{6555}$$
$$=\frac{4}{437}\fallingdotseq 0.0092$$

である。

§3. いたずら２
～２人でじゃんけんをして～

ａ君とｂさんがじゃんけんをして，ａ君が勝つときには１時間進め，ｂさんが勝つときには１時間遅らせ，あいこのときはそのままにする。ａ君とｂさんがじゃんけんを 14 回して，時計の針にこのようないたずらをするとき，いたずらをしたにもかかわらず時計が正しい時刻を示す確率と，正しい時刻を示したとき，実は 12 時間進んでいる条件付き確率を求めてみる。

12 時間進むという事象を C とすると，$C=A_1$ である。すると，$C=A_1\subset A$ であるから，
$A\cap C=C=A_1$ である。よって，正しい時刻を示したとき，実は 12 時間進んでいる確率は，条件付き確率 $P_A(C)=\dfrac{P(A\cap C)}{P(A)}=\dfrac{P(A_1)}{P(A)}$ である。

ｂさんが勝つ

１時間遅らせる

あいこ

そのまま

ａ君が勝つ

１時間進ませる

では，$P(A_1)$，$P(A_2)$，$P(A_3)$ を求めてみよう。

$P(A_1)$ について

ａ君とｂさんがするじゃんけん 14 回のうち，ａ君が x 回勝ち，ｂさんが y 回勝ち，あいこは z 回であるとすると　$x+y+z=14$　……①

また，ａ君の勝ち１回について１時間進め，ｂさんの勝ち１回について１時間遅らせ，あいこでは針を動かさないこと，14 回の試行で 12 時間進むことから，

$1\cdot x+(-1)\cdot y+0\cdot z=12$　つまり

$x=y+12$　……②　である。

x，y，z はそれぞれ０以上 14 以下の整数であるから，①，②より $(x,\ y,\ z)=(12,\ 0,\ 2)$，$(13,\ 1,\ 0)$

ａ君が勝つ確率，ｂさんが勝つ確率，あいこになる確率はともに $\dfrac{1}{3}$ であること，それを 14 回繰り返すとき，ａ君が 12 回勝ち，ｂさんが０回勝ち，あいこが２回である確率は反復試行の確率から

$$\frac{14!}{12!0!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=\frac{14\cdot 13}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{3^{14}}=\frac{91}{3^{14}}$$

また，ａ君が 13 回勝ち，ｂさんが１回勝ち，あいこが０回である確率は反復試行の確率から

$$\frac{14!}{13!1!0!}\left(\frac{1}{3}\right)^{13}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}=14\cdot\frac{1}{3^{14}}=\frac{14}{3^{14}}$$

よって，$P(A_1)=\dfrac{91}{3^{14}}+\dfrac{14}{3^{14}}=\dfrac{105}{3^{14}}=\dfrac{35}{3^{13}}\fallingdotseq 0.000022$

である。

$P(A_2)$ について

ａ君の勝ち１回について１時間進め，ｂさんの勝ち１回について１時間遅らせ，あいこでは針を動かさないこと，14 回の試行で進みも遅れもないことから

$1\cdot x+(-1)\cdot y+0\cdot z=0$　つまり　$x=y$　……③

である。

①，③より，

$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 14)$，$(1,\ 1,\ 12)$，$(2,\ 2,\ 10)$，
$(3,\ 3,\ 8)$，$(4,\ 4,\ 6)$，$(5,\ 5,\ 4)$，
$(6,\ 6,\ 2)$，$(7,\ 7,\ 0)$

である。

ａ君が勝つ確率，ｂさんが勝つ確率，あいこになる確率はともに $\dfrac{1}{3}$ であること，それを 14 回繰り返すとき，

ａ君，ｂさんがともに勝ちなしで，あいこが 14 回である事象 $A_{2,\ 1}$，

ａ君，ｂさんがともに１回勝ち，あいこが 12 回である事象 $A_{2,\ 2}$，

ａ君，ｂさんがともに２回勝ち，あいこが 10 回である事象 $A_{2,\ 3}$，

ａ君，ｂさんがともに３回勝ち，あいこが８回である事象 $A_{2,\ 4}$，

ａ君，ｂさんがともに４回勝ち，あいこが６回である事象 $A_{2,\ 5}$，

ａ君，ｂさんがともに５回勝ち，あいこが４回である事象 $A_{2,\ 6}$，

ａ君，ｂさんがともに６回勝ち，あいこが２回である事象 $A_{2,\ 7}$，

ａ君，ｂさんがともに７回勝ち，あいこがない事象 $A_{2,\ 8}$ は，互いに排反であり，それらの和事象は事象 A である。

したがって，

$$P(A_2)=P(A_{2,\ 1})+P(A_{2,\ 2})+P(A_{2,\ 3})+P(A_{2,\ 4})$$
$$+P(A_{2,\ 5})+P(A_{2,\ 6})+P(A_{2,\ 7})+P(A_{2,\ 8})$$

である。

$$P(A_{2,\ 1})=\frac{14!}{0!0!14!}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{14}=\frac{1}{3^{14}}$$

$$P(A_{2,\ 2})=\frac{14!}{1!1!12!}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{12}$$

$$=\frac{14\cdot13}{1\cdot1}\cdot\frac{1}{3^{14}}=\frac{182}{3^{14}}$$

$$P(A_{2,\ 3})=\frac{14!}{2!2!10!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$=\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{2\cdot1\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{3^{14}}=\frac{6006}{3^{14}}$$

$$P(A_{2,\ 4})=\frac{14!}{3!3!8!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^{8}$$

$$=\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{3^{14}}=\frac{60060}{3^{14}}$$

$$P(A_{2,\ 5})=\frac{14!}{4!4!6!}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{6}$$

$$=\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{3^{14}}$$

$$=\frac{210210}{3^{14}}$$

$$P(A_{2,\ 6})=\frac{14!}{5!5!4!}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^{4}$$

$$=\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{3^{14}}$$

$$=\frac{252252}{3^{14}}$$

$$P(A_{2,\ 7})=\frac{14!}{6!6!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$$

$$=\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{3^{14}}$$

$$=\frac{84084}{3^{14}}$$

$$P(A_{2,\ 8})=\frac{14!}{7!7!0!}\left(\frac{1}{3}\right)^7\left(\frac{1}{3}\right)^7\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$$

$$=\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{3^{14}}=\frac{3432}{3^{14}}$$

であるから，

$$P(A_2)=\frac{1}{3^{14}}+\frac{182}{3^{14}}+\frac{6006}{3^{14}}+\frac{60060}{3^{14}}+\frac{210210}{3^{14}}$$

$$+\frac{252252}{3^{14}}+\frac{84084}{3^{14}}+\frac{3432}{3^{14}}=\frac{616227}{3^{14}}$$

である。

$P(A_3)$ について

a 君と b さんがするじゃんけん 14 回のうち，a 君が x 回勝ち，b さんが y 回勝ち，あいこは z 回であるとすると　$x+y+z=14$　……①

また，a 君の勝ち 1 回について 1 時間進め，b さんの勝ち 1 回について 1 時間遅らせ，あいこでは針を動かさないこと，14 回の試行で 12 時間遅れることから，

$1\cdot x+(-1)\cdot y+0\cdot z=-12$

つまり　$y=x+12$　……② である。

x, y, z はそれぞれ 0 以上 14 以下の整数であるから，①，②より $(x,\ y,\ z)=(0,\ 12,\ 2)$, $(1,\ 13,\ 0)$

a 君が勝つ確率，b さんが勝つ確率，あいこになる確率はともに $\frac{1}{3}$ であること，それを 14 回反復している中で，a 君が 0 回勝ち，b さんが 12 回勝ち，あいこが 2 回である確率は反復試行の確率から

$$\frac{14!}{0!12!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{14\cdot13}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{3^{14}}=\frac{91}{3^{14}}$$

また，a 君が 1 回勝ち，b さんが 13 回勝ち，あいこが 0 回である確率は反復試行の確率から

$$\frac{14!}{1!13!0!}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{13}\left(\frac{1}{3}\right)^0=14\cdot\frac{1}{3^{14}}=\frac{14}{3^{14}}$$

よって

$$P(A_3)=\frac{91}{3^{14}}+\frac{14}{3^{14}}=\frac{105}{3^{14}}=\frac{35}{3^{13}}\fallingdotseq0.000022$$

以上から

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

$$=\frac{105}{3^{14}}+\frac{616227}{3^{14}}+\frac{105}{3^{14}}$$

$$=\frac{616437}{3^{14}}\fallingdotseq0.129$$

ここでわかることは，a 君と b さんがじゃんけんをして，a 君が勝つときには 1 時間進め，b さんが勝つときには 1 時間遅らせ，あいこのときはそのままにするとき，a 君と b さんがじゃんけんを 14 回して，時計の針にこのようないたずらをすれば，時計が正しい時刻を示す確率（本来の時刻にぴったり一致する確率）はほぼ 0.129 であること，12 時間進んで，あるいは 12 時間遅れて時刻としては変わらなくなる確率はそれぞれ約 0.000022 で極めて低いということである。

また，正しい時刻を示したとき，実は 12 時間進んでいる条件付き確率は，

$$P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{P(A_1)}{P(A)}=\frac{\frac{105}{3^{14}}}{\frac{616437}{3^{14}}}$$

$$=\frac{105}{616437}\fallingdotseq0.0002$$

である。

§4. まとめ

生徒の興味・関心を引く題材として，反復試行の確率と条件付き確率について，時計へのいたずらをすることを考えてみた。

時計の針を動かすといういたずらをしたにもかかわらず正しい時刻を示す確率や，正しい時刻を示していたときに，それは実際には12時間進んでいたり，12時間遅れていたりするために結果的に正しい時刻を示すという条件付き確率は，教科書で使い古された設定よりも生徒の興味・関心を引くことだろう。

（山口県立高森高等学校）