直角二等辺三角形の折り目の定理

～曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の接線～

伊藤（いとう） 亘央（のぶお）

§1. はじめに

数研通信 83 号の「正三角形の折り目の定理」で，正三角形の１つの頂点を向かい合う辺の上に移して正三角形を折るとき，その折り目を含む直線は常に特定の放物線の接線であることを導いた。また，数研通信 88 号の「単位四分円に最も近い放物線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$」で，曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ が，実は放物線であることを具体的に導いた。

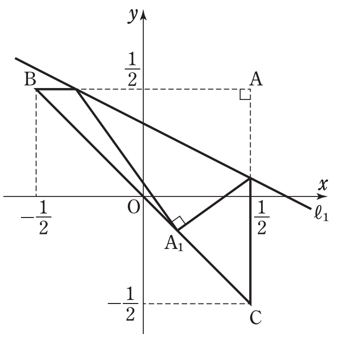
以上の２稿を結びつけて，曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ が，何らかの三角形の折り目の接線になっているはずであると考え，今回それを具体的に導く。

§2. 直角二等辺三角形の折り目の定理

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$，$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形の頂点Aを斜辺 BC 上に移して三角形を折るとき，その折り目を含む直線は，常に曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の接線であり，かつその接点の軌跡は曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と一致する。

§3. 定理の証明

座標平面上で，直角二等辺三角形 ABC を $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ としてとる。



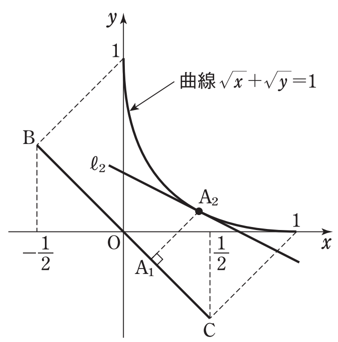
頂点Aを斜辺 BC 上に移して三角形 ABC を折り，その折り目を含む直線を ℓ_1 とする。頂点Aが斜辺 BC 上に移った点を $\mathrm{A}_1(t,\ -t)$ とおく。t の範囲は $-\frac{1}{2}\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ である。

まずは，ℓ_1 の方程式を求める。直線 AA_1 の傾きは $\dfrac{\frac{1}{2}-(-t)}{\frac{1}{2}-t}=\dfrac{1+2t}{1-2t}$ であるから，ℓ_1 の傾きは $\dfrac{2t-1}{2t+1}$ である。また，ℓ_1 は線分 AA_1 の中点 $\left(\dfrac{\frac{1}{2}+t}{2},\ \dfrac{\frac{1}{2}-t}{2}\right)=\left(\dfrac{1+2t}{4},\ \dfrac{1-2t}{4}\right)$ を通るから，ℓ_1 の方程式は $y-\dfrac{1-2t}{4}=\dfrac{2t-1}{2t+1}\left(x-\dfrac{1+2t}{4}\right)$

したがって

$$\ell_1: y=\frac{2t-1}{2t+1}x+\frac{1-2t}{2} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

次に，曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の接線について考える。点 A_1 を通り，傾き１の直線と曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の交点を A_2 とすると，$-\frac{1}{2}\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ の範囲で点 A_2 の軌跡は曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と一致する。点 A_2 を接点とする曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の接線を ℓ_2 とし，ℓ_2 の方程式を求める。



$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \iff y=1+x-2\sqrt{x}\ (0\leqq x\leqq 1)$
であることから，$f(x)=1+x-2\sqrt{x}$ とおくと

$$f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

点 A_1 を通り，傾き 1 の直線の方程式は $y=x-2t$
であるから，点 A_2 の x 座標は，
$1+x-2\sqrt{x}=x-2t$ を解いて $x=\left(\dfrac{2t+1}{2}\right)^2$
y 座標は $y=\left(\dfrac{2t+1}{2}\right)^2-2t=\left(\dfrac{2t-1}{2}\right)^2$
よって $A_2\left(\left(\dfrac{2t+1}{2}\right)^2,\ \left(\dfrac{2t-1}{2}\right)^2\right)$
ℓ_2 の傾きは

$$f'\left(\left(\frac{2t+1}{2}\right)^2\right)=1-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2t+1}{2}\right)^2}}$$

$$=1-\frac{1}{\frac{2t+1}{2}}=\frac{2t-1}{2t+1}$$

であるから，ℓ_2 の方程式は

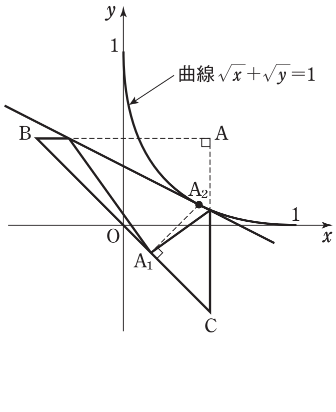
$$y-\left(\frac{2t-1}{2}\right)^2=\frac{2t-1}{2t+1}\left\{x-\left(\frac{2t+1}{2}\right)^2\right\}$$

すなわち $y=\dfrac{2t-1}{2t+1}x-\dfrac{4t-2}{4}$
したがって

$$\ell_2 : y=\frac{2t-1}{2t+1}x+\frac{1-2t}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

以上の①，②より ℓ_1，ℓ_2 は一致する。

したがって，折り目を含む直線は常に曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の接線であり，かつその接点の軌跡は点Aが斜辺 BC 上を動く範囲で曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と一致する。



§4. 折り目と曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ が接する範囲

ここまでは，折り目を“含む”直線，つまり折り目の“延長”が曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ に接する場合も含めていたが，折り目そのものが直接に曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ に接するときの範囲について追記したい。

曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と辺 AB，辺 AC との交点をそれぞれ B_0，C_0 とする。折り目が直接に接するときの接点 A_2 の存在範囲は，曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の B_0 から C_0 までの部分である。$\sqrt{s}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}=1$ を解くと，$s=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$ を得るから

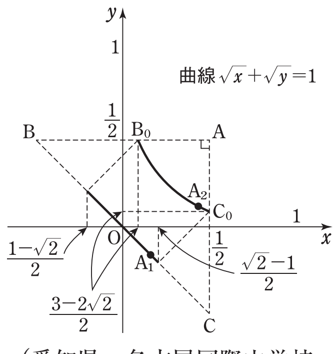
$$B_0\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ C_0\left(\frac{1}{2},\ \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)$$

これと $A_2\left(\left(\dfrac{2t+1}{2}\right)^2,\ \left(\dfrac{2t-1}{2}\right)^2\right)$ より，t の範囲は

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\leqq\left(\frac{2t+1}{2}\right)^2\leqq\frac{1}{2},\ \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\leqq\left(\frac{2t-1}{2}\right)^2\leqq\frac{1}{2}$$

を満たす共通範囲をとって $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

以上より，折り目が直接に曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ に接するとき，頂点Aが斜辺 BC 上に移った点は直線 $y=-x$ 上の $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ の範囲を動き，接点は曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 上の点 $B_0\left(\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ から点 $C_0\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)$ までの範囲を動く。



（愛知県　名古屋国際中学校・高等学校）