点と直線の距離の公式とヘッセの標準形

礒部（いそべ）　一哉（かずや）

§1. はじめに

例えば，「2点間の距離の公式」は $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ とすれば，$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ であり，これは正に「三平方の定理」そのものであると考えることができます。しかし，「点と直線の距離の公式」と言えば，直線 $ax+by+c=0$ と点 $(x_1,\ y_1)$ との距離 d を表す式は，$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ですが，図形的にどこをどう表したものなのか不思議に思っていたので考えてみました。

§2. 「点と直線の距離」の図形的理解

まず，直線の一般形を $ax+by+c=0$ として考えていると，図形的に $|ax_1+by_1+c|$ や $\sqrt{a^2+b^2}$ がどこを表しているのかよく分かりません。あえて言えば，直線 $ax+by+c=0$ と点 $(x_1,\ y_1)$ との x 軸方向の距離は $d_x=\left|\dfrac{ax_1+by_1+c}{a}\right|$，$y$ 軸方向の距離は $d_y=\left|\dfrac{ax_1+by_1+c}{b}\right|$ であり，三角形の面積を2通りで表した式から d を求めれば，

$\dfrac{1}{2}d\sqrt{{d_x}^2+{d_y}^2}=\dfrac{1}{2}d_xd_y$ より，

$$d=\frac{d_xd_y}{\sqrt{{d_x}^2+{d_y}^2}}=|ax_1+by_1+c|\frac{\left|\dfrac{1}{ab}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2}}$$

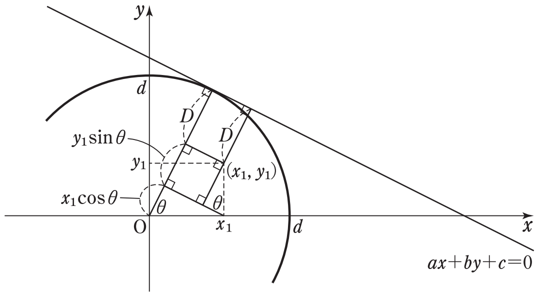
$$=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

と求めることができます。

ここでは，$ax+by+c=0$ (general form) に対して，$x\cos\theta+y\sin\theta-d=0$ (normal form) という「ヘッセの標準形」という形を使います。円 $x^2+y^2=d^2$ 上の点 $(d\cos\theta,\ d\sin\theta)$ における接線の方程式は　$xd\cos\theta+yd\sin\theta=d^2$

すなわち　$x\cos\theta+y\sin\theta-d=0$

つまり，ヘッセの標準形の直線は，原点との距離が d であり，単位法線ベクトルが $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ で表されているものです。(x，y の係数のノルムが1。)



よって，$ax+by+c=0$ ($c<0$ とする。) をヘッセの標準形に変形すれば，ノルムを1とするため $\sqrt{a^2+b^2}$ で割り，$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y-\dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$ となり，$d=\dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ と分かります。

$$\left(\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

さて，点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $x\cos\theta+y\sin\theta-d=0$ との距離 D は，図より，

$$\begin{aligned}D&=|d-x_1\cos\theta-y_1\sin\theta|\\&=|x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-d|\\&=\left|\frac{ax_1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\\&=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}$$

となり，点と直線の距離の公式を得ました。すなわち，「点と直線の距離の公式」は，図形的には，直線 $ax+by+c=0$ と接する原点中心の円の半径 d の部分から，図の $x_1\cos\theta$，$y_1\sin\theta$ を引いたものであることが分かりました。図は，$\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$，点 $(x_1,\ y_1)$ を直線の下側にとっていますが，符号を考えれば結局は d と $x_1\cos\theta$，$y_1\sin\theta$ の和や差です。

§3. ヘッセの標準形

一応，これで当初の目的である，「点と直線の距離の公式」を図形的に理解することはできましたが，これに考えが及ぶまでの思考回路や，なぜヘッセの標準形というものが現れたかを説明します。まず，

$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ であるからには，

$(a^2+b^2)d^2=|ax_1+by_1+c|^2$ であるに違いないと思い，そうなりそうな直角三角形を探してみましたが見つからず，$a^2+b^2=\left|\dfrac{ax_1+by_1+c}{d}\right|^2$ ならば，先ほどの d と d_x で直角三角形はできますが，あまりしっくりきませんでした。(理由は a，b が係数で，図形的に a，b を表すことが難しいため。) そこで，$x^2+y^2=d^2$ となる円と合わせて，

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$
$$=|ax_1+by_1+c|^2$$

と変形して探してみました。ここで，直線 $ax+by=0$ と直線 $ay-bx=0$ は直交し，それらを陰関数と見たとき，それぞれの左辺の2乗の和が定数になるものは円を表します。さらに，右辺の定数をうまく表そうとしたとき，左辺の2つの陰関数をヘッセの標準形で表せばちょうどいいことが分かりました。すなわち，ここで1つの系を得ました。

> **系**　ヘッセの標準形の陰関数
> $\ell=x\cos\theta+y\sin\theta-d=0$ と点 $(x_1,\ y_1)$ で直交する直線を，ヘッセの標準形の陰関数で表したものを ℓ' とすると，$\ell^2+\ell'^2=r^2$ は点 $(x_1,\ y_1)$ を中心とする半径 r の円を表す。

証明　$\ell=x\cos\theta+y\sin\theta-d=0$

$\ell'=x\sin\theta-y\cos\theta-x_1\sin\theta+y_1\cos\theta=0$ となり，

$\ell^2+\ell'^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$　**証明終**

このとき，右辺を r^2 とするためには，ヘッセの標準形の形をしていなければならなかったのです。(ノルムが1でなければならなかった。)

§4. おわりに

この新しい見方は，例えば円の標準形である $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$ は点 $(x_1,\ y_1)$ を中心とする半径 r の円を表すが，陰関数 $x-x_1=0$，$y-y_1=0$，と見て(これらはともにヘッセの標準形でもある)，その2乗の和が半径の2乗であると見ることもできます。さて，この系を得ましたが，なぜ(あるいは図形的に) $\ell^2+\ell'^2=r^2$ は点 $(x_1,\ y_1)$ を中心とする半径 r の円を表すのでしょうか？　なぜこのときヘッセの標準形がちょうどいいのでしょうか？　ご教授いただければ幸いです。(愛知県　至学館高等学校)