常用対数 $\log_{10}7$ の近似値に関する一考察

結川（ゆいかわ）　義明（よしあき）

§1. はじめに

1桁の自然数の常用対数は7を除きすべて，常用対数 $\log_{10}2$，$\log_{10}3$ を用いて求めることができる。

$\log_{10}4=2\cdot\log_{10}2=2\times0.3010=0.6020$

$\log_{10}5=\log_{10}(10\div2)$
$\quad=1-0.3010=0.6990$

$\log_{10}6=\log_{10}(2\times3)$
$\quad=0.3010+0.4771=0.7781$

$\log_{10}8=3\cdot\log_{10}2=3\times0.3010=0.9030$

$\log_{10}9=2\cdot\log_{10}3=2\times0.4771=0.9542$

ここでは，常用対数 $\log_{10}7\fallingdotseq0.8451$ の近似値が工夫することにより，常用対数 $\log_{10}2$，$\log_{10}3$ の値を用いて求められることを紹介する。ただし，正確を期すため，$\log_{10}2$，$\log_{10}3$ の値は小数第6位を四捨五入した値，すなわち，$\log_{10}2=0.30103$，$\log_{10}3=0.47712$ を使用することにする。

§2. 小数第2位までの近似値の求め方

$48<49<50$ より　$4\sqrt{3}<7<5\sqrt{2}$

ここで

$$\log_{10}4\sqrt{3}=\log_{10}(2^2\times3^{\frac{1}{2}})$$
$$=2\cdot\log_{10}2+\frac{1}{2}\cdot\log_{10}3$$
$$=2\times0.30103+\frac{1}{2}\times0.47712$$
$$=0.84062$$

$$\log_{10}5\sqrt{2}=\log_{10}(5\times2^{\frac{1}{2}})$$
$$=\log_{10}5+\frac{1}{2}\cdot\log_{10}2$$
$$=(1-0.30103)+\frac{1}{2}\times0.30103$$
$$=0.849485$$

したがって　$0.84062<\log_{10}7<0.849485$

よって　$\log_{10}7\fallingdotseq0.84$

§3. 小数第3位までの近似値の求め方

$7^4=2401>2400=2^3\times3\times10^2$ より

$$\log_{10}7^4>\log_{10}(2^3\times3\times10^2)$$
$$4\cdot\log_{10}7>3\cdot\log_{10}2+\log_{10}3+2\cdot\log_{10}10$$
$$\log_{10}7>\frac{1}{4}(3\times0.30103+0.47712+2)$$
$$=0.8450525$$

また，$48\times\dfrac{1024}{1000}=49.152>49$ より

$$\log_{10}49<\log_{10}\left(48\times\frac{1024}{1000}\right)$$
$$2\cdot\log_{10}7<\log_{10}\left(2^4\times3\times\frac{2^{10}}{10^3}\right)$$
$$\log_{10}7<\frac{1}{2}(14\times0.30103+0.47712-3)$$
$$=0.84577$$

したがって　$0.8450525<\log_{10}7<0.84577$

よって　$\log_{10}7\fallingdotseq0.845$

§4. 小数第4位までの近似値の求め方

$$7^3\cdot2^2\cdot3^6=1000188>1000000=10^6$$
$$\log_{10}(7^3\cdot2^2\cdot3^6)>\log_{10}10^6$$
$$3\cdot\log_{10}7>6\cdot\log_{10}10-2\cdot\log_{10}2-6\cdot\log_{10}3$$
$$\log_{10}7>\frac{1}{3}(6-2\times0.30103-6\times0.47712)$$
$$=0.845073$$

また

$$7^8\cdot2^{10}=5903156224<5904900000=3^{10}\cdot10^5$$
$$\log_{10}(7^8\cdot2^{10})<\log_{10}(3^{10}\cdot10^5)$$
$$8\cdot\log_{10}7<10\cdot\log_{10}3+5\cdot\log_{10}10-10\cdot\log_{10}2$$
$$\log_{10}7<\frac{1}{8}(10\times0.47712-10\times0.30103+5)$$
$$=0.8451125$$

したがって　$0.845073<\log_{10}7<0.8451125$

よって　$\log_{10}7\fallingdotseq0.8451$

§5. おわりに

小数第 4 位までの近似値の求め方については，桁数はかなり大きいが，対数の計算自体はさほど難しくはない。生徒の数学への興味・関心を高める 1 つとして，常用対数 $\log_{10}7$ の近似値が $\log_{10}2$，$\log_{10}3$ の値で求められることを紹介しても面白いのではないだろうか。また，数学の探究活動として，真数が素数の常用対数 $\log_{10}11$ や $\log_{10}13$ の近似値を $\log_{10}2$，$\log_{10}3$ で求めさせることなども考えられるのではないだろうか。

《参考文献》

〔1〕「数学Ⅱ」大島利雄・坪井俊・筧三郎他
数研出版

(埼玉県立豊岡高等学校)