$2^6-2^5+2^4-2^3+2^2-2^1+2^0$
$={}_6C_0\cdot2^0+{}_5C_1\cdot2^1+{}_4C_2\cdot2^2+{}_3C_3\cdot2^3$

藤岡（ふじおか）　優太（まさと）

§1. 問題

同僚のＴ先生と次の問題を考える機会がありました。

「硬貨を n 回投げる。１回投げるごとに，表が出たら１を，裏が出たら 01 を選び，左から順に並べて 0 と１の文字列を作る。左から n 番目の文字が１である文字列の総数 a_n を求めよ。」

漸化式の利用も考えられますが，ここでは直接 a_n を求めることとします。

§2. 解答

硬貨を n 回投げて作られる文字列の総数は 2^n 通りである。これらのうち条件に適さないものは，左から n 番目と $(n+1)$ 番目に 01 が置かれている場合であり，n 回硬貨を投げるうちの１回（どの回かはわからないが）が裏の場合である。

もしも，残り $(n-1)$ 回が表・裏をフリーにできるのであれば求める a_n は 2^n-2^{n-1} 通りとなるが，これでは「引きすぎ」。なぜなら，残り $(n-1)$ 回は表・裏をフリーにできるわけではなく，n 番目と $(n+1)$ 番目に 01 を置く直前の回では１しか置けない（表が指定される）場合がある。

n 回硬貨を投げるうちの２回が裏，表と指定され，もしも，残り $(n-2)$ 回が表・裏をフリーにできるのであれば求める a_n は

$2^n-(2^{n-1}-2^{n-2})=2^n-2^{n-1}+2^{n-2}$ 通りとなるが，これでは「足しすぎ」。なぜなら，残り $(n-2)$ 回は表・裏をフリーにできるわけではなく…。

以上のことから，

$$a_n=2^n-2^{n-1}+2^{n-2}-\cdots+(-1)^n\cdot2^0 \quad \cdots\cdots①$$

$$\left(=\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{2-(-1)}=\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}\right)$$

とわかる。

§3. 別解

ところで a_n は，次のように考えられます。

左から n 番目の文字が１のとき，n 番目の位置に文字が置かれるまでに出た硬貨の裏の回数を x，表の回数を y とすると $2x+y=n$ が成り立ちます。

このとき $(x+y)+x=n$ であることから n 番目の位置に文字を置いてから残り x 回硬貨を投げることになるわけですが，$x+y=n-x$ 回のうち，どの回を裏にするかが ${}_{n-x}C_x$ 通りあり，残りの x 回は表にするか，裏にするかで 2^x 通りあることから，

$x\geqq0$，$n-x\geqq x$ より $0\leqq x\leqq\left[\frac{n}{2}\right]$ を考慮すると

$$a_n=\sum_{x=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-x}C_x\cdot2^x$$

$$={}_nC_0\cdot2^0+{}_{n-1}C_1\cdot2^1+\cdots+{}_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}C_{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot2^{\left[\frac{n}{2}\right]} \quad \cdots\cdots②$$

とかけることがわかります。

§4. 結論

以上のことから，①，②を見比べることで

$$2^n-2^{n-1}+2^{n-2}-\cdots+(-1)^n\cdot2^0$$

$$={}_nC_0\cdot2^0+{}_{n-1}C_1\cdot2^1+\cdots+{}_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}C_{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot2^{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

が成り立つことがわかります。

一見，ピンときませんが，例えば $n=6$ では

★　$2^6-2^5+2^4-2^3+2^2-2^1+2^0$

$$=\frac{2^7-(-1)^7}{3}=43$$

☆　${}_6C_0\cdot2^0+{}_5C_1\cdot2^1+{}_4C_2\cdot2^2+{}_3C_3\cdot2^3$

$$=1+10+24+8=43$$

と，確かに ★＝☆ となっています。

（高知県　土佐高等学校）