～数研通信 70 号，76 号を読んで～
精密化されたチェビシェフの定理の初等的証明について

鈴木　直矢（すずき　なおや）

§1. はじめに

定理 1.1　（ベルトラン・チェビシェフの定理）

任意の自然数nに対し，$n<p\leqq 2n$ を満たす素数pが存在する。

数研通信 70 号に一松先生によるこの定理の証明の発展に関する記事が掲載されました。その後 76 号において栃折先生，才野瀬先生がそれぞれさらにその発展というべき内容を発表され，大変興味を持ちました。ここでは，エルデシュの証明と一松先生，栃折先生によるその発展を簡単に解説し，そのアイデアに沿って才野瀬先生による精密化されたチェビシェフの定理の別証明を与えたいと思います。エルデシュ・一松・栃折のアイデアを理解できれば，他の公式は基本的に必要ないようになっております。

§2. エルデシュによる証明の概要

まずエルデシュによる定理 1.1 の証明の概要を説明します。

(証明)　**補題 2.1.** $n\geqq 3$ に対し，次が成り立つ。

$$_{2n}\mathrm{C}_n>\frac{4^n}{2n}$$

補題 2.2. $n\geqq 3$ に対し，次が成り立つ。

$$_{2n}\mathrm{C}_n\leqq \prod_{p\leqq\sqrt{2n}}2n\cdot\prod_{\sqrt{2n}<p\leqq\frac{2}{3}n}p\cdot\prod_{n<p\leqq 2n}p$$

ただし，ここで上記のように書いた積は条件を満たすすべての素数pにわたってとるものとする。

この 2 つの補題より

$$4^n\leqq(2n)^{1+\sqrt{2n}}\cdot\prod_{\sqrt{2n}<p\leqq\frac{2}{3}n}p\cdot\prod_{n<p\leqq 2n}p$$

が成り立つ。

よって，もしある $n\geqq 3$ に対し $n<p\leqq 2n$ となる素数が存在しなかった場合，次が成り立つ。

$$4^n\leqq(2n)^{1+\sqrt{2n}}\cdot\prod_{\sqrt{2n}<p\leqq\frac{2}{3}n}p$$

ここで次の補題を導入する。

補題 2.3. 実数 $x\geqq 2$ に対し，次が成り立つ。

$$\prod_{p\leqq x}p\leqq 4^{x-1}$$

補題 2.3 より　$4^n\leqq(2n)^{1+\sqrt{2n}}4^{\frac{2}{3}n}$

すなわち　$4^{\frac{n}{3}}\leqq(2n)^{1+\sqrt{2n}}$

となるが，この式はnが十分大きいと成り立たない。（実際にエルデシュはこの式から $n<4000$ という不等式を導きました。）　その範囲では $n<p\leqq 2n$ となる素数pが存在することが素数表より確かめられるからベルトラン・チェビシェフの定理が証明された。　□

§3. 一松・栃折による改良

まず補題 2.1 が一松先生により以下のように改良されました。

補題 3.1. $n\geqq 3$ に対し，次が成り立つ。

$$_{2n}\mathrm{C}_n>\frac{4^n}{n}$$

さらにエルデシュが用いた $\prod_{p\leqq\sqrt{2n}}2n\leqq(2n)^{\sqrt{2n}}$ という評価式が，一松先生により

$$\prod_{p\leqq\sqrt{2n}}2n\leqq(2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{3}+2}$$

という評価式に改良されました。

（任意の整数 $m\geqq 1$ に対し $6m$ から $6m+5$ の間に高々 2 つしか素数がないことから従います。$+2$ というのは 2，3 の分です。）

よって，ある $n \geqq 3$ に対し $n < p \leqq 2n$ となる素数 p が存在しなかった場合，次が成り立つ。

$$4^n \leqq \frac{1}{2}(2n)^{1+\frac{\sqrt{2n}}{3}+2} \cdot \prod_{\sqrt{2n}<p\leqq\frac{2}{3}n} p$$

次に，栃折先生により補題 2.3 が次のように改良されました。

補題 3.2. 実数 $x \geqq 2$ に対し，次が成り立つ。

$$\prod_{p\leqq x} p \leqq 2\cdot 4^{x-2}$$

さらに，今 $n \leqq 5$ に関してはベルトラン・チェビシェフの定理は容易に確認できるから $n \geqq 5$ として良く，補題 3.2 と合わせて次が成り立ちます。

$$\prod_{\sqrt{2n}<p\leqq\frac{2}{3}n} p < 2\cdot 4^{\frac{2}{3}n-2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3} < 2\cdot 4^{\frac{2}{3}n-3}$$

したがって，まとめると次が成り立ちます。

$$4^n < (2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{3}+3}\cdot 4^{\frac{2}{3}n-3}$$

栃折先生はこの不等式からさらに巧みな計算をされて，最終的に $n<64$ という評価を得られました。

§4. $4n$ と $6n$ の間の素数について

この章では，任意の自然数 n に対し $4n$ と $6n$ の間に素数が存在することを証明します。この証明は，実質的に次の章の主定理の証明となっています。

補題 2.1 に相当するものとして，まず 2 つ補題を用意します。

補題 4.1. $n \geqq 3$ に対し，次が成り立つ。

$${}_{6n}\mathrm{C}_{4n} > 6^n \cdot {}_{3n}\mathrm{C}_{2n}$$

(証明) 数学的帰納法による。まず $n=3$ のとき，

$$\frac{{}_{18}\mathrm{C}_{12}}{{}_{9}\mathrm{C}_{6}} = 221 > 6^3$$

$n=k$ のとき成り立つとして $n=k+1$ のとき，

$$\frac{{}_{6k+6}\mathrm{C}_{4k+4}}{{}_{3k+3}\mathrm{C}_{2k+2}} = \frac{{}_{6k}\mathrm{C}_{4k}}{{}_{3k}\mathrm{C}_{2k}} \cdot \frac{3(6k+5)(6k+1)}{(4k+3)(4k+1)}$$

ここで　$(6k+5)(6k+1) - 2(4k+3)(4k+1)$
$= (2k+1)^2 - 2 > 0$

より $\dfrac{3(6k+5)(6k+1)}{(4k+3)(4k+1)} > 6$

よって，補題 4.1 は成り立つ。 □

補題 4.2. $n \geqq 3$ に対し，次が成り立つ。

$${}_{3n}\mathrm{C}_{2n} \geqq \prod_{n+1\leqq p\leqq\frac{3}{2}n} p \cdot \prod_{2n+1\leqq p\leqq 3n} p$$

(証明) $2n+1 \leqq p \leqq 3n$ を満たす素数は ${}_{3n}\mathrm{C}_{2n} = \dfrac{3n!}{2n!n!}$ の分子にのみ含まれ，また $n+1 \leqq p \leqq \dfrac{3}{2}n$ を満たす素数は分子に 2 つ，分母に 1 つ素因数として含まれるから補題 4.2 が成り立つ。 □

次に，補題 2.2 に相当するものとして次の補題を証明します。

補題 4.3. $n \geqq 3$ に対し，次が成り立つ。

$${}_{6n}\mathrm{C}_{4n} \leqq \prod_{p\leqq\sqrt{6n}} 6n \cdot \prod_{\sqrt{6n}<p\leqq\frac{3}{2}n} p \times \prod_{2n+1\leqq p\leqq 3n} p \cdot \prod_{4n+1\leqq p\leqq 6n} p$$

(証明) ${}_{6n}\mathrm{C}_{4n}$ の素因数分解に現れる素数 p の個数を e_p とすると次が成り立つ。

$$e_p = \sum_{k\geqq 1}\left(\left[\frac{6n}{p^k}\right] - \left[\frac{4n}{p^k}\right] - \left[\frac{2n}{p^k}\right]\right)$$

ただし，[ ]はガウス記号を表す。各 k に対し

$$\left[\frac{6n}{p^k}\right] - \left[\frac{4n}{p^k}\right] - \left[\frac{2n}{p^k}\right] < \frac{6n}{p^k} - \left(\frac{4n}{p^k} - 1\right) - \left(\frac{2n}{p^k} - 1\right) = 2$$

が成り立つことから各項は高々 1 であり

$$e_p \leqq \sum_{k\geqq 1,\ p^k\leqq 6n} 1 = \max\{k \geqq 1 \mid p^k \leqq 6n\}$$

したがって　$p^{e_p} \leqq \max\{p^k \geqq 1 \mid p^k \leqq 6n\} \leqq 6n$

さらに，$p > \sqrt{6n}$ のときは $e_p \leqq 1$ であり，$3n+1 \leqq p \leqq 4n$ または $\dfrac{3}{2}n < p \leqq 2n$ を満たす素数 p に対しては $e_p = 0$ となることから補題 4.3 の式が成り立つ。 □

以上，準備が整ったので次の定理を証明します。

定理 4.1. 任意の自然数 n に対し，$4n \leqq p \leqq 6n$ を満たす素数 p が存在する。

(証明) もしある $n \geqq 3$ に対し $4n \leqq p \leqq 6n$ となる素数が存在しなかったとすると，補題 4.3 より

$${}_{6n}\mathrm{C}_{4n} \leqq \prod_{p\leqq\sqrt{6n}} 6n \cdot \prod_{\sqrt{6n}<p\leqq\frac{3}{2}n} p \cdot \prod_{2n+1\leqq p\leqq 3n} p$$

すると補題 4.1 と補題 4.2 より

$$6^n \cdot \prod_{n+1\leqq p\leqq\frac{3}{2}n} p \cdot \prod_{2n+1\leqq p\leqq 3n} p$$

$$\leqq \prod_{p\leqq\sqrt{6n}} 6n \cdot \prod_{\sqrt{6n}<p\leqq\frac{3}{2}n} p \cdot \prod_{2n+1\leqq p\leqq 3n} p$$

すなわち　$6^n \leqq \displaystyle\prod_{p\leqq\sqrt{6n}} 6n \cdot \prod_{\sqrt{6n}<p\leqq n} p$

ここで一松先生による不等式を僅かに厳しくした次の不等式を使う。

$$\prod_{p\leqq\sqrt{6n}}6n\leqq(6n)^{\frac{\sqrt{6n}}{3}}$$

この不等式は，今nがあまり大きくない場合は素数表を使って定理 4.1 が成り立つことを確かめられることからnは十分大きいとしてよく，1 から$\sqrt{6n}$ の間に 25 や 35 といった 2，3 以外の数による合成数が存在することから従う。この不等式と先述の評価式，および補題 2.3 より

$$6^n\leqq(6n)^{\frac{\sqrt{6n}}{3}}\cdot4^n$$

すなわち　$\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\leqq(6n)^{\frac{\sqrt{6n}}{3}}$

が成り立つ。あとはこの不等式を用いてnを上から評価すれば良いが，例えば

$$3^n<\left(\frac{3}{2}\right)^{3n}<(6n)^{\sqrt{6n}}<3^{2\sqrt{6n}}\cdot n^{\sqrt{6n}}$$

より $3^{n-2\sqrt{6n}}<n^{\sqrt{6n}}$ を得る。nがある程度大きいとき $3^{\frac{n}{6}}>n$ である ($n=18$ のときを示してあとは数学的帰納法) から　$n=(\sqrt{n}\,)^2<(3^{\frac{\sqrt{n}}{6}})^2=3^{\frac{\sqrt{n}}{3}}$

よって　$3^{n-2\sqrt{6n}}<3^{\frac{\sqrt{6}}{3}n}$

すなわち　$n-2\sqrt{6n}<\dfrac{\sqrt{6}}{3}n$

$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<0.9$ より $\dfrac{1}{10}n<2\sqrt{6n}$ であり，$n<2400$ となるが，この場合のnに対しては定理 4.1 が成り立つことは素数表より確かめられるから，定理 4.1 は示された。 □

§5. $2n$ と $3n$ の間の素数について

まず，次の定理を証明します。

定理 5.1. 任意の自然数nに対し，
$4n+2\leqq p\leqq6n+3$ を満たす素数pが存在する。

(証明)　もしある $n\geqq3$ に対し $4n+2\leqq p\leqq6n+3$ となる素数pが存在しなかったとすると

$$\begin{aligned}&\prod_{4(n+1)+1\leqq p\leqq6(n+1)}p\\&\leqq\prod_{4n+2\leqq p\leqq6n+3}p\cdot\prod_{6n+4\leqq p\leqq6n+6}p\leqq6n+5\end{aligned}$$

よって，補題 4.3 より

$$\begin{aligned}&{}_{6(n+1)}\mathrm{C}_{4(n+1)}\\&\leqq\prod_{p\leqq\sqrt{6(n+1)}}6(n+1)\cdot\prod_{\sqrt{6(n+1)}<p\leqq\frac{3}{2}(n+1)}p\\&\qquad\times\prod_{2(n+1)+1\leqq p\leqq3(n+1)}p\cdot(6n+5)\end{aligned}$$

したがって，定理 4.1 の場合と同様の議論を繰り返して

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\leqq\left(\prod_{p\leqq\sqrt{6(n+1)}}6(n+1)\right)\cdot(6n+5)$$

となり，

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\leqq\{6(n+1)\}^{\frac{\sqrt{6(n+1)}}{3}+1}$$

しかし，これはnがある程度大きいと成り立たない。 □

定理 4.1 と定理 5.1 を合わせて，次の精密化されたチェビシェフの定理が得られました。

定理 5.2. 任意の自然数nに対し，$2n\leqq p\leqq3n$ を満たす素数pが存在する。

《参考文献》

〔1〕 ア・ヤ・ヒンチン著　蟹江幸博訳　数論の 3 つの真珠　日本評論社　pp.116〜120
〔2〕 才野瀬一郎「チェビシェフの定理の精密化」数研通信 No.76　pp.22〜26
〔3〕 栃折成紀「「n と $2n$ の間に素数がある」の証明を考える」数研通信 No.76　pp.27〜29
〔4〕 一松信「n と $2n$ の間に素数がある」数研通信 No.70　pp.2〜5

(秋田県　秋田工業高等専門学校)