ベルトラン・チェビシェフの定理を使う
～$n!$（$n \geqq 2$）は平方数ではないことの証明～

西元(にしもと)　教善(のりよし)

§1. はじめに

数研通信（70号，76号）で，「すべての自然数nに対して，$n<p \leqq 2n$ である素数pが存在する」というベルトラン・チェビシェフの定理が扱ってあった。

後に放浪の天才数学者と言われたポール・エルデシュ（ハンガリー，1913～1996）の初等的な証明を力のある高校生にもわかるようにブラッシュアップした証明とそれよりもより強い評価による証明であった。

2つともその定理を証明するものであり，それを使って何かを証明する，つまり証明の活用についてではなかった。確かに，「すべての自然数nに対して，$n<p \leqq 2n$ である素数pが存在する」ということは興味深い定理であるが，この数学的事実がどのような問題のどのような場面に使えるのかという応用も興味深い。定理を証明することに留まらずその活用に目を向けて，本稿では$n!$（$n \geqq 2$）は平方数ではない，つまり$\sqrt{n!}$（$n \geqq 2$）は無理数であることをこの定理を使って証明してみたい。

§2. 10までの自然数の階乗

自然数nの階乗 $n!=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ について，$n=1$ から $n=10$ までを求めると，表1のようになる。

$1!=1$

$2!=2\cdot 1=2$

$3!=3\cdot 2\cdot 1=2\cdot 3=6$

$4!=4\cdot 3!=2^2\cdot(2\cdot 3)=2^3\cdot 3=24$

$5!=5\cdot 4!=5\cdot(2^3\cdot 3)=2^3\cdot 3\cdot 5=120$

$6!=6\cdot 5!=(2\cdot 3)\cdot(2^3\cdot 3\cdot 5)=2^4\cdot 3^2\cdot 5=720$

$7!=7\cdot 6!=7\cdot(2^4\cdot 3^2\cdot 5)=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=5040$

$8!=8\cdot 7!=2^3\cdot(2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)=2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=40320$

$9!=9\cdot 8!=3^2\cdot(2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)=2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7=362880$

$10!=10\cdot 9!=(2\cdot 5)\cdot(2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7)=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7=3628800$

表1

$n=2$ から $n=10$ までのnの階乗$n!$は，表1での素因数分解からもわかるように平方数ではない。したがって，$\sqrt{n!}$（$n=2$，3，4，…，10）は自然数ではなく無理数である。

では，一般に『2以上の自然数nの階乗$n!$は平方数でなく，したがって$\sqrt{n!}$は無理数である。』と言えるのであろうか。

§3. 素因数分解からわかること

表1の中の素因数分解に注目し，どのようなことがわかるか考察しよう。生徒に問いかけてみるとよいだろう。

即座に，次のようなことに気付くだろう。ただし，$n=2$，3，4，……，10である。

(1)　$n!$を素因数分解すると，素因数としてn以下の素数がすべて出現する。

(2)　$n!$のn以下の最大素因数の指数は1である。

これを式で表してみる。

ここで，$\{p_n\}$を，素数を小さい順にもれなく並べた数列とする。つまり，

$p_1=2$，$p_2=3$，$p_3=5$，$p_4=7$，$p_5=11$，……，
$p_n=$(小さい方からn番目の素数)，……

とする。

また，nを2以上の自然数とするとき，n以下の素数の個数を$\varphi(n)$で表すと

$\varphi(2)=1$，$\varphi(3)=2$，$\varphi(4)=2$，$\varphi(5)=3$，$\varphi(6)=3$，
$\varphi(7)=4$，$\varphi(8)=4$，$\varphi(9)=4$，$\varphi(10)=4$

である。

$10!=10\cdot 9\cdot 8\cdot \underline{7}\cdot 6\cdot \underline{5}\cdot 4\cdot \underline{3}\cdot \underline{2}$ であるから，$10!$を素因数分解すると10以下のすべての素数は素因数として出現する。

また，$n!$ を素因数分解したときの素因数 p_i の指数を $e_i(n)$ で表すと，$10!=2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$ であるから，$e_1(10)=8$，$e_2(10)=4$，$e_3(10)=2$，$e_4(10)=1$ である。したがって，

$$10!=2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7=p_1{}^{e_1(10)}p_2{}^{e_2(10)}p_3{}^{e_3(10)}p_4{}^{e_4(10)}$$

と表せる。

これらを踏まえると一般に 2 以上の自然数 n の階乗 $n!$ を素因数分解すると（$*$）のように表せる。

$$(*)\quad n!=\prod_{i=1}^{\varphi(n)}p_i{}^{e_i(n)}$$

なお，$\prod_{i=1}^{n}a_i=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n$ である。

(1)は自明であるが，(2)は証明をしておく必要があるだろう。

(2)が証明されれば，$e_{\varphi(n)}(n)=1$ であるから，（$*$）は（$**$）のように表せる。

$$(**)\quad n!=\left(\prod_{i=1}^{\varphi(n)-1}p_i{}^{e_i(n)}\right)p_{\varphi(n)}$$

§4. $p_{\varphi(n)}\geqq\left[\frac{n}{2}\right]+1$ であること

～ベルトラン・チェビシェフの定理の利用～

(2)を証明する。$p_{\varphi(n)}\geqq\left[\frac{n}{2}\right]+1$ であることを示せば，$\left[\frac{n}{2}\right]$ 以下の自然数は $p_{\varphi(n)}$ を素因数にもたないし，$\left[\frac{n}{2}\right]$ 以上 n 以下である自然数 m は $m=p_{\varphi(n)}$ 以外に $p_{\varphi(n)}$ を素因数にもたない。したがって，（$**$）のように表せる。

ベルトラン・チェビシェフの定理とは『すべての自然数 n に対して，$n<p\leqq2n$ を満たす素数 p が存在する。』というものである。

この定理から，$\left[\frac{n}{2}\right]<p\leqq2\left[\frac{n}{2}\right]\leqq n$ を満たす素数 p が存在する。

$p_{\varphi(n)}\leqq\left[\frac{n}{2}\right]$ であるとすれば，$p_{\varphi(n)}<p\leqq n$ である素数 p が存在するが，$p_{\varphi(n)}$ は n 以下の最大素数であるから，矛盾する。よって，$p_{\varphi(n)}\geqq\left[\frac{n}{2}\right]+1$ である。

§5. $n\geqq2$ のとき $n!$ は平方数ではないこと

（$**$）のように表せることから，$n!$ を素因数分解したとき，$p_{\varphi(n)}$ の指数は 1 である。$n!$（$n\geqq2$）が平方数になるためには，素因数分解したとき各素因数の指数は偶数でなければならないが，これが成り立たない。よって，$n!$（$n\geqq2$）は平方数にはならない。

§6. まとめ

「ベルトラン・チェビシェフの定理」という高校生にとって，いわば「飛び道具的な定理」を使って証明したが，定理の意味は高校生でも容易に理解できる。

$1<p\leqq2\cdot1$ である素数 p は $p=2$
$2<p\leqq2\cdot2$ である素数 p は $p=3$
$3<p\leqq2\cdot3$ である素数 p は $p=5$
$4<p\leqq2\cdot4$ である素数 p は $p=5$，7
$5<p\leqq2\cdot5$ である素数 p は $p=7$
………

というようにすべての自然数 n に対して，$n<p\leqq2n$ を満たす素数 p が存在するというものである。

なお，エルデシュが証明したのはなんと高校生のときである。一松先生によれば「実力のある生徒であれば十分に理解できる証明で知っていて損はない」というものでもある。(〔1〕)

『$n!$（$n\geqq2$）は平方数にはならない』ことの証明に使うにはいささか「牛刀割鶏」的であるかもしれないが,「使ってこそ定理」という思いで使ってみた。

階乗 $n!$ は「場合の数」で出てくるが,「整数の性質」の問題としても恰好の題材である。その指導に大いに活用したいものである。

《参考文献》

〔1〕 一松信，n と $2n$ の間に素数がある―ベルトラン・チェビシェフの定理のエルデーシュによる初等的証明―，数研通信 70 号，pp 2－5，2011
〔2〕 栃折成紀,「n と $2n$ の間に素数がある」の証明を考える―ベルトラン・チェビシェフの定理のより強い評価による証明―，数研通信 76 号，pp 27－29，2013

（山口県立高森高等学校）