必要も積もれば十分となる

内藤（ないとう）　康正（やすまさ）

§1．はじめに

問題1　（1997 一橋大学）

> すべての自然数nに対して5^n+an+bが16の倍数となるような16以下の自然数a，bを求めよ。

タイトルの「必要も積もれば十分となる」は，故石谷茂先生が「塵も積もれば山となる」をもじって用いた標語です(参考文献〔1〕)。同値変形によって(必要十分)条件を導くことが難しい場合，必要条件から考えて十分条件に達する論法を印象的に表しています。

3年生の整数問題の講習で問題1を最終日の力試しに出題したところ予想以上に出来が悪く，
「$n=1$，2 のとき16の倍数であることが必要であることからa，bの値を定め，逆にそれで十分であることを示す」標準的な解法を示したのですが，必要条件と十分条件の扱い方に自信がない，という声が多く聞かれました。「…であることが必要」という語感がぴんと来ない，という声もありました。

そこでこの機会に，必要条件について断片的に感じていたことや意見を整理して小文にまとめてみようと思った次第です。

なお，必要条件から問題を解決する過程を整理すると，

ⅰ）必要条件を積んでいくとやがて十分条件になる「必要も積もれば十分になる」タイプ

ⅱ）必要条件を調べたら，それがそのまま十分条件になる「必要転じて十分となる」タイプ

ⅲ）必要条件で範囲を絞って，その中から適するものを選ぶ「十分は必要のうち」タイプ

に大別できそうです。

§2．必要条件から考える解法はいつ学ぶか

問題2　（数研出版数学Ⅱ p21 例題5）

> 次の等式がxについての恒等式となるように，定数a，b，cの値を定めよ。
> $$x^2-x=a(x-3)^2+b(x-3)+c$$

教科書を手繰ってみると，必要条件から考える型を学ぶ例題は少ないことに気づきます。このことが必要条件を活用した問題解決に自信を持てない状況にそのまま反映していると思われます。

ただ，指導に適した例題が皆無というわけではなく，問題2などは目的に適う1題だと思います。しかし以下の理由からこちらの意図がうまく伝わらないことが多い気がします。

というのは，問題2に対しては必要十分な正攻法として係数比較法を用いた解答を示したあとに「次のように定めることもできる」として必要条件から考える数値代入法が紹介されています。

ところが，両辺がn次以下の整式どうしのときは$n+1$個の異なるxの値に対して成り立てば恒等式であることが知られている，結果的には絶対大丈夫である，とまとめられているため，形式的に「逆に」を書けばよい，というくらいのところに落ち着いてしまうのです。

ではいつ，どのような例題で“必要条件から考える解法”を学べばよいのでしょうか。必要・十分条件は1年次の序盤に学ぶので，同一年度内に学習のチャンスがほしいと感じます。そこで，次の問題3などはどうでしょう。

問題 3　(改訂版白チャート数学A例題 94)

> $N=(n-4)(n+8)$ が素数になるような整数 n をすべて求めよ。

p を素数として (　)×(　)$=p$ になるのは

$1\times p$, $p\times 1$, $(-1)\times(-p)$, $(-p)\times(-1)$

の 4 通りしかないわけですから

$n-4=\pm 1$ または $n+8=\pm 1$　…①

であることが必要になります。

命題：N が素数　⇒　①

が真であることから，命題と条件の単元で学んだ通り，矢印の先にある条件①が必要条件であることも理解しやすいですし，

「さもなければ N が素数にはなり得ない」

「かといって必ず素数になるとは限らない」

ということが，実例ですぐに確かめられます。これらがすなわち

「…であることが必要」

「だが十分とは限らない」

に他ならず，この問題の解答で

「N が素数であるためには，①が必要」

「そのうち，十分なものは $n=5$, -9」

という記述を使うことで，分かりづらい語感に慣れる一歩になると考えます。「十分は必要のうち」タイプで，初学者にも分かりやすいと思います。

§3. センター試験の活用

教科書ではありませんが，場数 (ばかず) を踏むのに適しているのが大学入試センター試験の，特に数列の問題です。穴埋め試験では，必要性から空欄が埋まれば十分性を確認する必要はなく，$n=1$, 2, 3 を代入して答えを見つけるという“指導”も可能なのは周知の事実です。

次の問題 4 は，2014 年度のセンター数学Ⅱ・Bの問題をもとにしたものです。A, B, C, D は空欄 1 マスに相当しますから，それぞれ 0 ～ 9 の数字が当てはまります。

必要条件から誰が一番早く答えを見つけられるか競争するのも一案です。

問題 4

> $a_2=15$, $a_3=28$ であるような数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n=An^B+Cn+D$ を求めよ。

おそらく答えに「0」はないだろうという判断の下に求めてみます。

a_n の式に $n=2$, 3 を代入して得られる次の条件から考えます。

$a_2=A\cdot 2^B+2C+D=15$

$a_3=A\cdot 3^B+3C+D=28$

問題の設定上 $B\geqq 2$ が必要 (!?) ですが，a_3 の式から $B\leqq 2$ が必要なので $B=2$。結局

$4A+2C+D=15$ …①

$9A+3C+D=28$ …②

から A, C, D を決定することになります。

①から　$D\equiv 1 \pmod 2$, ②から　$D\equiv 1 \pmod 3$

したがって $D=1$, 7 に絞ることができ，あとは一直線です。

楽をして穴埋めをしようという側面が強調されすぎると弊害もあるかと思いますが，野生的とも言える感覚で必要条件から答えを見つける体験ができると思います。

§4. 解の配置問題

ここで教科書に戻ります。次の問題 5 は文字通り「必要が積もって十分になる」問題ですが，その解法に関しては以前から疑問に思うことがあり，ここで述べさせていただこうと思います。

問題 5　(数研出版数学Ⅰ改訂版　応用例題 10)

> 2 次関数 $y=x^2-2mx-m+2$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

問題 5 の解答では，関数のグラフについて

① グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる

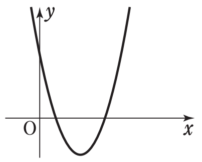
② グラフの軸が y 軸より右側にある

③ グラフと y 軸の交点の y 座標が正である

の 3 つが同時に成り立つことが条件と示されています。本稿では以下これらの条件を，①「判」②「軸」③「端」と命名します。

さて，この問題 5 の理解のためには，次の問題 6 が鍵になると考えます。

問題 6　(参考：改訂版白チャート数学Ⅰ例題 99)

> 2 次関数
> $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右のようになるとき，次の値の符号を調べよ。
> c，b^2-4ac，$-\dfrac{b}{2a}$
>
> 
>

グラフから，

$$c>0 \qquad b^2-4ac>0 \qquad -\frac{b}{2a}>0$$

が読み取れば正解ですが，この 1 つ 1 つがグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるための必要条件に当たります。問題 5 は，逆にこの必要条件を積むと題意のグラフになるか (つまり十分になるか ?) がポイントです。先ほどの疑問というのは，この 3 つの必要条件を判・軸・端の順に考えている点です。ここで節を改めます。

§5. 必要条件は「端判軸」の順に積む

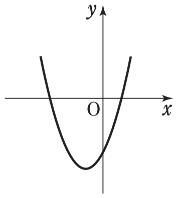
解の配置問題の練習を進めるとすぐに，2 次関数のグラフが x 軸の正の部分と負の部分で 1 か所ずつ交わる (あるいは 2 次方程式が正負の解を 1 つずつもつ) ようにせよ，という問題が現れます。この問題に対して応用例題 10 (問題 5) に準じて判・軸・端の順に条件を立てると，すっきりいきません。

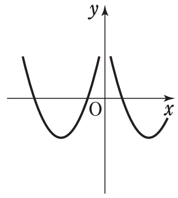
その原因は，最初に考える「判」が，あとになって調べなくても大丈夫だった (過分条件 ?)，となること。(また，調べたからといってミスではないことも初心者には分かりづらい。) 次の「軸」は必要でない (不要条件 ?) こと。結果として最後の「端」だけでよいということです。器用に次々要領を飲み込んでいく生徒もいますが，皆が皆器用というわけではありません。この問題をきっかけに解の配置に苦手意識を持つ生徒は少なくないと感じます。パターンごとに立てるべき条件を記憶しなければならない問題と写るのかもしれません。

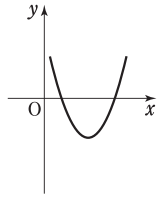
また，傍用問題集などでは与えられた 2 次方程式が $0<x<1$ と $1<x<2$ に解を 1 つずつ持つようにする問題が項目を改め発展問題として扱われていますが，「端」の扱いに慣れてしまえば，最も基本的な問題と言えないでしょうか。発展と宣言されているだけで敬遠したり食わず嫌いになってしまう生徒もいると感じます。

そこで解の配置問題のパターンを検討してみると，必要条件は「端・判・軸」の順に積み上げることが合理的と考えられます。例えば 2 次方程式に関する基本的なパターンとしては

端　　　　…異符号の解をもつ十分条件になる
端・判　　…同符号の解をもつ十分条件になる
端・判・軸…異なる正の解をもつ十分条件になる







端　$c<0$

$\begin{cases} \text{端}\ c>0 \\ \text{判}\ D>0 \end{cases}$

$\begin{cases} \text{端}\ c>0 \\ \text{判}\ D>0 \\ \text{軸}\ -\dfrac{b}{2a}>0 \end{cases}$

といった具合です。“不要条件”や“過分条件”も出てこず分かりやすい。考えてみれば，もともと「方程式の解をここに配置せよ」と指定するのですから，解の位置を指定するための「境界＝端」を最優先するのは，自然なこととも思えます。

「解の配置は端判軸の順に」という提案です。

§6. 結びに変えて

しかし，改めて必要条件・十分条件は日常用語との相違からつくづく難しい用語だと思います。「立川駅から東京駅まで行くのにいくら必要？」と訊ねられて「50 円必要だけど，十分ではない。」では答えになりません。この難しさのためではないにせよ，教科書の記述に必要条件が登場することはあまりなく，生徒にとっては「○○は△△であるための何条件か，選択肢から選べ」という 4 択問題のための用語と言っても過言ではありません。

微分法の典型問題である，極値の条件から関数 $f(x)$ の係数を決定する問題では

$$x=a \text{ で極値} \quad \Rightarrow \quad f'(a)=0 \qquad \cdots(*)$$

を利用しますが，この例題の解答でも

「$f'(a)=0$ であることが必要 (条件) である。」

といった記述はありません。そのため，単なる必要条件を求めているという意識は生まれずに，「逆に」以降を不要と判断する生徒がいかに多いことか。仮に必要 (条件) という用語を用いないとしても，

「$x=a$ で極値をとるように係数を定めよ」

という問題文に対しては，仮定と結論がはっきり分かるように

「$x=a$ で極値をとるならば　$f'(a)=0$

よって△△。　逆に△△ならば…　」

という記述があれば，「必要が転じて十分になるか？」を調べる意味が伝わりやすいと思うのですが，数学Ⅱの教科書では

「$x=a$ で極値をとるから　$f'(a)=0$

よって…　」

となっています。

(蛇足になりますが，命題(＊)については「逆は成り立たない」としながら「逆の確認が必要」といった，混乱しそうな解説を参考書などで見かけることがあります。条件文($p\Longrightarrow q$ の形の命題)の指導の難しさを感じる１題でもあります。)

とはいえ，難しい用語であっても積極的に用いることによって正しい思考に達する学生も少なからずいると信じます。～に優しいという言い方がありますが，学生に優しい用語だけを用いることで彼らの可能性を摘んでしまうことのないよう心がけたいと思うところです。

《参考文献》

〔１〕 石谷茂「教科書にない高校数学」現代数学社
〔２〕「数学Ⅱ」数研出版
〔３〕「改訂版 基礎と演習 数学Ⅰ＋Ａ」数研出版

(東京都立立川高等学校)