$x^2\pm(x+y+z)$ が平方数である有理数 x, y, z

鈴木（すずき） 崇裕（たかひろ）

§1. 問題との出会い

地元の書店のおすすめコーナーに『青の数学』があり何気なく手に取った。数学に魅せられ，真正面から向き合う高校生の物語。数学に情熱を傾け，数学を考えるときの心情がありありと描かれていて引き込まれる。この本の中で，主人公が以下の問題に悪戦苦闘していた。

問題

$x^2\pm(x+y+z)$，$y^2\pm(x+y+z)$，$z^2\pm(x+y+z)$ がどれも平方数であるような有理数 x，y，z を求めよ。

ここでいう平方数は，有理数の平方数として扱い，この問題を考察していきたい。

§2. 解の一つ

$\{x, y, z\}=\{0, q, -q\}$（q は有理数）は自明な解である。これ以外の解を求める。

問題の 3 つの式をよく見ると

$$x^2 \quad \pm(x+y+z)=\text{平方数}$$
$$y^2 \quad \pm(x+y+z)=\text{平方数}$$
$$z^2 \quad \pm(x+y+z)=\text{平方数}$$

$x+y+z$ は共通で，式の最初の 2 次の部分が x，y，z の 3 種である。これを別の表現に言い換えられないだろうか。

$$a^2+b^2\pm2ab \quad =(a\pm b)^2$$

ここで，$a^2+b^2=c^2$ とすると

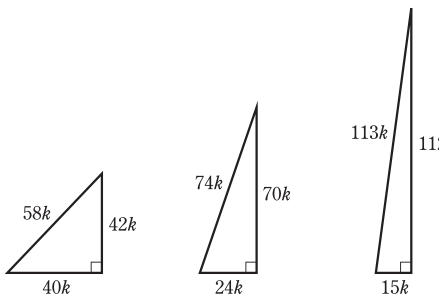
$$c^2 \quad \pm2ab \quad =(a\pm b)^2$$

$a^2+b^2=c^2$ において，ab が一定で c^2 が 3 つあれば x，y，z が定まる。つまり，面積が等しく斜辺の長さが異なる 3 つの直角三角形を見つければよい。

例えば，$(a, b, c)=(40, 42, 58)$，$(24, 70, 74)$，$(15, 112, 113)$ の面積 $\frac{1}{2}ab$ はどれも 840 で一定で，斜辺 c の長さが異なっている。3 辺を正の実数倍しても面積は一定で，斜辺の長さは異なるから

$$(58k)^2\pm\underline{2\cdot40k\cdot42k}=(40k\pm42k)^2$$
$$(74k)^2\pm\underline{2\cdot24k\cdot70k}=(24k\pm70k)^2$$
$$(113k)^2\pm\underline{2\cdot15k\cdot112k}=(15k\pm112k)^2$$

が成り立つ。



この実数倍した 3 つの c の和と $2ab$ が等しいとき，3 つの c が x，y，z になる。$x=58k$，$y=74k$，$z=113k$（$k>0$）とおくと，$2ab$（下線部分）は一定で $x+y+z$ と等しい。

$$58k+74k+113k=\underline{3360k^2}$$

これを解いて　$k=\dfrac{7}{96}$

よって　$x=\dfrac{203}{48}$，$y=\dfrac{259}{48}$，$z=\dfrac{791}{96}$

実際　$x^2\pm(x+y+z)=(82k)^2,\ (-2k)^2$

$$=\left(\frac{287}{48}\right)^2,\ \left(\frac{7}{48}\right)^2$$

$$y^2\pm(x+y+z)=(94k)^2,\ (-46k)^2$$

$$=\left(\frac{329}{48}\right)^2,\ \left(\frac{161}{48}\right)^2$$

$$z^2\pm(x+y+z)=(127k)^2,\ (-97k)^2$$

$$=\left(\frac{889}{96}\right)^2,\ \left(\frac{679}{96}\right)^2$$

となり，どれも有理数の平方数である。なお，x，y，z を入れ替えたものも解である。

§3. ピタゴラス数

§2. から $a^2+b^2=c^2$ のもとで，ab が一定で c^2 が 3 つ存在すると，求める解 x，y，z が導かれる。そこで，ピタゴラス数を持ち出すことにしよう。

m，n を自然数とし，$m \fallingdotseq n$ とする。

$$a=|m^2-n^2|,\ b=2mn,\ c=m^2+n^2$$

としたとき，$a^2+b^2=c^2$ を満たす。

(組 $(a,\ b,\ c)$ は，原始ピタゴラス数とは限らない)

このとき，積 ab は

$$\begin{aligned} ab&=2mn|m^2-n^2| \\ &=|2mn(m-n)(m+n)| \end{aligned}$$

となる。

§2. の例は $(m,\ n)=(7,\ 3),\ (7,\ 5),\ (7,\ 8)$ にあたる。どれも $m=7$ であることに気付く。そこで，他にも m が等しく，ab が一定になる組 $(m,\ n)$ が 3 つ存在するものがないか調べた。3 つの n を n_1，n_2，n_3 として，一部を以下の表にまとめた。

m	n_1	n_2	n_3	ab
7	3	5	8	1680
13	7	8	15	21840
14	6	10	16	26880
19	5	16	21	63840
21	9	15	24	136080
⋮				⋮

m が共通で n の値が異なれば，c の値も異なるので，ここからは問題を読み替えて

> m を固定して，ab が一定となる異なる 3 つの n を求める。

本レポートでは，m を固定したときの解を探る。

§4. 3 つの n の関係

$$ab=|2mn(m-n)(m+n)|$$

において，m を固定しているので

$$|n(m-n)(m+n)|$$

が一定になるときの n について考察する。

次の 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について考える。

$$f(x)=|x(m-x)(m+x)|\ (x>0),$$
$$g(x)=x(m-x)(m+x)=-x^3+m^2x$$

とする。

$g(x)$ は奇関数で

$$g'(x)=-3x^2+m^2$$

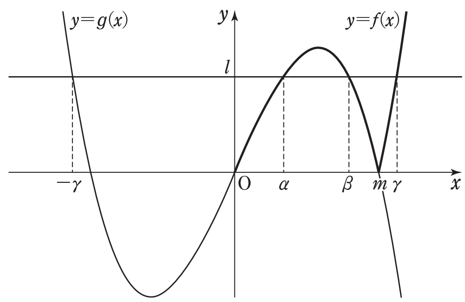
より，$x \geqq 0$ における $y=g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{m}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$	0	↗	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}m^3$	↘

よって，$0<l<\dfrac{2\sqrt{3}}{9}m^3$ のとき，方程式 $f(x)=l$ は異なる 3 つの実数解をもつ。3 つの解を $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (0<\alpha<\beta<r)$ とする。このとき

$$f(\gamma)=-g(\gamma)=g(-\gamma)$$

が成り立っている。



したがって，$g(x)=l$ の解は $x=-\gamma,\ \alpha,\ \beta$ である。解と係数の関係から

$$-\gamma+\alpha+\beta=0$$
$$\alpha+\beta=\gamma$$

この関係は§3. の表を見ても確かに $n_1+n_2=n_3$ となっている。

§5. α と β の関係

$l_0<\left|\dfrac{2\sqrt{3}}{9}m^3\right|$ において，$g(x)=l_0$ を満たす x の値が正のときは $f(x)=l$ となり，負のときは $f(-x)=l$ となることから，$f(x)=l$ の解は $g(x)=l_0$ を解いても得られる。

そこで，$g(x)=l_0$ の解のうち 2 解を α，β とし，$\beta=\alpha+d\ (d \fallingdotseq 0)$ で表すと

$$g(\alpha)=g(\alpha+d)$$

$$-\alpha^3+m^2\alpha=-(\alpha+d)^3+m^2(\alpha+d)$$

より，これを整理すると

$$d^2+3\alpha d+3\alpha^2-m^2=0$$

$$d=\frac{-3\alpha\pm\sqrt{4m^2-3\alpha^2}}{2}$$

ここまで α，β を実数扱いしているが，もし α，β が自然数であれば，それは n そのものになる。

α，d が整数であれば，β も整数であるから，まず d の根号がはずれるときの自然数 m，α を求める。$4m^2-3\alpha^2$ が平方数となるとき，D を自然数として

$$4m^2-3\alpha^2=D^2$$

と表すことができ

$$D^2+3\alpha^2=4m^2 \qquad \cdots\cdots(*)$$

となる。

ここで，曲線 $C：x^2+3y^2=1$ を考える。曲線 C 上の点 $(-1,\ 0)$ を通り，傾きを r とする直線 L は，$y=r(x+1)$ で与えられる。曲線 C と直線 L の交点は，

$$x=\frac{1-3r^2}{1+3r^2},\ y=\frac{2r}{1+3r^2}$$

となる。r が有理数ならば x，y は有理数になり，また一方で，x，y が有理数ならば $r^2=\dfrac{1-x}{3(1+x)}$ が有理数であることから，$r=\dfrac{1}{2}(1+3r^2)y$ は有理数である。

$r=\dfrac{v}{u}$（u は自然数，v は整数）とすると

$$x=\frac{u^2-3v^2}{u^2+3v^2},\ y=\frac{2uv}{u^2+3v^2}$$

さらに等式 $(*)$ を考慮して，$x=\dfrac{X}{2Z}$，$y=\dfrac{Y}{2Z}$（X，Y は整数，Z は 0 でない整数）とすると

$$\frac{X}{u^2-3v^2}=\frac{Y}{2uv}=\frac{2Z}{u^2+3v^2}$$

が得られる。ゆえに

$$X：Y：Z=(u^2-3v^2)：2uv：\frac{1}{2}(u^2+3v^2)$$

を満たす整数 X，Y，Z は，等式 $X^2+3Y^2=4Z^2$ の整数解である。

以上をもとに，α が偶数に限定されないよう

$$D=\left|\frac{1}{2}(u^2-3v^2)\right|,\ \alpha=uv,\ m=\frac{1}{4}(u^2+3v^2)$$

とし，D，α，m が自然数になるとき，等式 $(*)$ の関係を満たすようにする。

§6. 自然数 n の正体

s，$t\ (s>t)$ を自然数として

$$m=s^2+st+t^2$$

とする。

$$m=\frac{4m}{4}=\frac{1}{4}(4s^2+4st+4t^2)$$

$$=\frac{1}{4}\{(s+2t)^2+3s^2\} \qquad \cdots\cdots①$$

$$=\frac{1}{4}\{(2s+t)^2+3t^2\} \qquad \cdots\cdots②$$

$$=\frac{1}{4}\{(s-t)^2+3(s+t)^2\} \qquad \cdots\cdots③$$

と変形できる。

①式から $u=s+2t$，$v=s$ とすると

$$D=\left|\frac{1}{2}\{(s+2t)^2-3s^2\}\right|=|-s^2+2st+2t^2|,$$

$$\alpha=s(s+2t)$$

よって，D，α は自然数で式 $(*)$ を満たす。

同様に，②式から $u=2s+t$，$v=t$ とすると

$$D=|2s^2+2st-t^2|,\ \alpha=t(2s+t)$$

③式から $u=s-t$，$v=s+t$ とすると

$$D=|s^2+4st+t^2|,\ \alpha=s^2-t^2$$

いずれも，D，α は自然数で式 $(*)$ を満たす。

したがって，①，②，③から得た α，すなわち

$$s(s+2t),\ t(2s+t),\ s^2-t^2$$

はどれも方程式 $f(x)=l$ の自然数解で，異なる 3 つの n を表している。(m を 3 つの式に変形できたので，そこから $f(x)=l$ の 3 つの解が求められた。しかし，①～③のうち 1 つでも分かれば，$f(x)=l$ の 1 つの解と整数 d が求まり，$g(x)$ が奇関数より残りの 2 つの解も導き出される。)

$s>t$ より $n_3=s(s+2t)$ が決定する。

§7. m について

s^2+st+t^2 の性質について調べる。

定理　s，t を自然数とする。

$p=s^2+st+t^2$ が素数ならば $p=3$ または $p\equiv1\pmod 6$ である。

証明

(i) $s=t$ のとき，$p=3s^2$ となり $s=t=1$ においてのみ $p=3$ で素数である。

(ii) s，t がともに偶数のとき，s^2+st+t^2 は 2 より大きい偶数となり素数ではない。

(iii)　(i)，(ii)でないとき，6を法としたs^2+st+t^2の値を以下の表にまとめる。網掛け部分は，(ii)のときで，表から除いた。

$s^2+st+t^2\ (\bmod 6)$

s＼t	0	1	2	3	4	5
0		1		3		1
1	1	3	1	1	3	1
2		1		1		3
3	3	1	1	3	1	1
4		3		1		1
5	1	1	3	1	1	3

表中の3のとき，つまり $s^2+st+t^2\equiv 3\ (\bmod 6)$ は常に3より大きい3の倍数であることを示し素数ではない。したがって，s^2+st+t^2 が素数となり得る箇所は，6を法として1になる。

以上(i)，(ii)，(iii)より，p が素数ならば $p=3$ または $p\equiv 1\ (\bmod 6)$ である。■

§3.の表を見ると，m は $6N+1$ 型の素数とその倍数になっている。なお，s^2+st+t^2 が $s=t$ のときは，§6.より $n=3s^2$（2重解），0となり異なる3つの n は存在しない。

§8. m を固定したときの解 x，y，z

§2.の例と同じ流れで x，y，z を求めていく。

§6.より $s>t$ において $m=s^2+st+t^2$，$n_1=s^2-t^2$，$n_2=t(2s+t)$，$n_3=s(s+2t)$ とする。（m が s^2+st+t^2 の倍数のときも，n に同じ倍数だけ掛けることで，以下と同様にして x，y，z が求められる。）

$n_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$ によって得られる c を c_i で表す。§3.から，$c_i=m^2+n_i^2$ より

$$c_1=2s^4+2s^3t+s^2t^2+2st^3+2t^4$$
$$c_2=s^4+2s^3t+7s^2t^2+6st^3+2t^4$$
$$c_3=2s^4+6s^3t+7s^2t^2+2st^3+t^4$$

また，積 ab はどの n_i をとっても等しく

$$\begin{aligned} ab&=|2mn(m-n)(m+n)| \\ &=2(s^2+st+t^2)(s^2-t^2)\cdot t(2s+t)\cdot s(s+2t) \\ &=2n_1n_2n_3m \end{aligned}$$

となる。

$x=c_1k$，$y=c_2k$，$z=c_3k\ (k>0)$ とする。$x+y+z=2abk^2$ を満たすとき，$x^2\pm(x+y+z)$，$y^2\pm(x+y+z)$，$z^2\pm(x+y+z)$ はどれも平方数になる。$x+y+z$ を整理すると

$$\begin{aligned} x+y+z&=(c_1+c_2+c_3)k \\ &=5(s^4+2s^3t+3s^2t^2+2st^3+t^4)k \\ &=5(s^2+st+t^2)^2k \\ &=5m^2k \end{aligned}$$

よって，$x+y+z=2abk^2$ を解くと

$$5m^2k=4n_1n_2n_3mk^2$$

$$k=\frac{5m}{4n_1n_2n_3}$$

ゆえに，$\{x,\ y,\ z\}$ は次の通りである。

$$\begin{cases} x=c_1\cdot\dfrac{5m}{4n_1n_2n_3}=\dfrac{5m(m^2+n_1^2)}{4n_1n_2n_3} \\ y=c_2\cdot\dfrac{5m}{4n_1n_2n_3}=\dfrac{5m(m^2+n_2^2)}{4n_1n_2n_3} \\ z=c_3\cdot\dfrac{5m}{4n_1n_2n_3}=\dfrac{5m(m^2+n_3^2)}{4n_1n_2n_3} \end{cases}$$

§9. おわりに

解けるかどうか分からない問題に挑み，最後はまさか m，n で表せるとは思いもよらなかった。式をいじくり回して跳ね返されながらも考え続け，ある日，$m=s^2+st+t^2$ に気付けたことが幸運であった。これで m，n は自然数 s，$t\ (s>t)$ から求められる。1つの問題にこだわってやり続けた結果，高校数学で調べられる範囲であっても，興味深い事実にたどり着けた。

《参考文献》

〔1〕 王城夕紀（2016）『青の数学』 新潮文庫
〔2〕 ジョセフ・H・シルヴァーマン（2014）『はじめての数論　原書第3版：発見と証明の大航海―ピタゴラスの定理から楕円曲線まで』 鈴木治郎訳　丸善出版

（静岡県　静岡雙葉高等学校・中学校）