多平方の定理

森島（もりしま）　充（みつる）

§1. はじめに

数研出版の問題集に次のような問題がありました。

> a，b，c は正の数とする。4点 O(0，0，0)，A(a，0，0)，B(0，b，0)，C(0，0，c) を頂点とする四面体の体積を V，△OAB，△OBC，△OCA，△ABC の面積を，それぞれ S_1，S_2，S_3，S とする。また，Oから平面 ABC に下ろした垂線の足をHとする。
>
> (1)　V，S_1，S_2，S_3，S および線分 OH の長さを，それぞれ求めよ。
>
> (2)　$S^2=S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2$ であることを証明せよ。

(2)の式は「四平方の定理」と呼ばれることもあるようです。この式に注目して，これを n 次元空間へ一般化しようと思います。

§2. 四平方の定理

> $S^2=S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2$

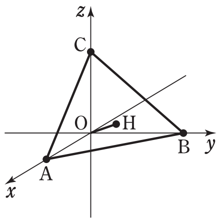
最初に(2)の式を証明します。ただし，次の一般化への準備として，OH から S を求めます。

平面 ABC の方程式は，

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

ですから，

$$\mathrm{OH}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}$$



です。したがって，

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{OH}$$

より，

$$S=\frac{3V}{\mathrm{OH}}=3\cdot\frac{1}{6}abc\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

ですから，

$$S^2=S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2$$

が成り立ちます。

§3. 仮定

次に(2)の式を一般化します。しかし，高次元における面積や体積を考える事になるので，３次元までと矛盾せず，かつ４次元以上でも整合性のある自然な「面積」や「体積」を考えなければなりません。そのより所として，次の仮定をします。

> **仮定**「k 次元の相似な図形の「体積」比は，相似比の k 乗に一致する。」……(＊)

ただし「体積」は，１次元では長さ，２次元では面積，４次元以上では体積に相当する高次の量です。

この仮定の根拠を，さらに考えることもできると思いますが，ここではこれを直感的に受け入れて次の定理の証明に利用しようと思います。

§4. 多平方の定理

> $S^2=S_1{}^2+S_2{}^2+\cdots\cdots+S_n{}^2$　（ただし　$n\geqq 2$）

仮定（＊）の下に，上の式を証明します。S，S_1，S_2，……，S_n は証明の中で定義していきます。

x_k ($k=1$，2，……，n) を軸として，原点をOとする n 次元空間において，n 個の点 A_k を考えます。各 A_k は，それぞれ x_k 軸上にあり，x_k 座標が a_k ($a_k>0$) で，他の座標はすべて 0 とします。

最初に，原点Oと n 個の点 A_k を結んでできる n 次元空間の「立体図形」の「体積」V_n を求めます。そのために，仮定（＊）を用いて，n 次元の中で，線分の長さ V_1，三角形の面積 V_2，四面体の体積 V_3 と順に膨らませて，V_n を求めることにします。

漸化式を作ると，

$$V_1=a_1,\ \ V_{k+1}=\int_0^{a_{k+1}}\left(1-\frac{x_{k+1}}{a_{k+1}}\right)^k V_k dx_{k+1}$$

となります（$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$）。これより，

$$V_{k+1}=\left[-\frac{a_{k+1}}{k+1}\left(1-\frac{x_{k+1}}{a_{k+1}}\right)^{k+1}V_k\right]_0^{a_{k+1}}$$

$$=\frac{a_{k+1}}{k+1}V_k$$

よって，

$$V_n=\frac{1}{n!}a_1a_2\cdots\cdots a_n$$

と求められます。

次に，n 次元空間において，方程式

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{a_n}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす点全体の集合を，n 個の点 A_k を通る「平面」と定義します。平面①は n 次元空間における $n-1$ 次元の部分集合です。また，ベクトル $\vec{n}$ を

$$\vec{n}=\left(\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{a_n}\right)$$

と定めると，平面①上の任意の異なる 2 点を結んでできるベクトルと $\vec{n}$ の内積は 0 ですので，$\vec{n}$ は平面①の「法線ベクトル」です。

また，原点Oを通り $\vec{n}$ に平行な直線と平面①の交点をHとすると，$\vec{n}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}||\vec{n}|=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{n}|$$

です。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(h_1,\ h_2,\ \cdots\cdots,\ h_n)$ とすると，点Hは平面①上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{n}=(h_1,\ h_2,\ \cdots\cdots,\ h_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{a_n}\right)$$

$$=\frac{h_1}{a_1}+\frac{h_2}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{h_n}{a_n}=1$$

です。よって，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}||\vec{n}|=|1|=1$$

$$\mathrm{OH}=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{1}{|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{{a_1}^2}+\frac{1}{{a_2}^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{{a_n}^2}}}$$

となります。

次に，平面①上の n 個の点 A_k を結んでできる $n-1$ 次元の「平面図形」の「面積」S を求めます。

仮定（＊）を用いて S から V_n を求めると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ の方向に t 軸を考えて，

$$V_n=\int_0^{\mathrm{OH}}\left(\frac{t}{\mathrm{OH}}\right)^{n-1}S\,dt=\left[\frac{1}{n\cdot\mathrm{OH}^{n-1}}t^nS\right]_0^{\mathrm{OH}}$$

$$=\frac{1}{n}S\cdot\mathrm{OH}$$

です。よって，S は，

$$S=\frac{nV_n}{\mathrm{OH}}$$

$$=n\cdot\frac{1}{n!}a_1a_2\cdots\cdots a_n\sqrt{\frac{1}{{a_1}^2}+\frac{1}{{a_2}^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{{a_n}^2}}$$

と求められます。

簡単のために，a_k（$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）から a_j を除いた $n-1$ 個の値の積を〔a_j〕とかくことにすると，

$$S=\frac{1}{(n-1)!}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}〔a_j〕^2} \quad \cdots\cdots ②$$

です。

一方，n 個の点 A_k から A_j を除いた $n-1$ 個の点と原点Oを結んでできる図形も，n 次元空間における $n-1$ 次元の「平面図形」です。この図形の「面積」S_j を求めます。

この $n-1$ 個の点 A_k（$k\neq j$）から x_j 座標を取り除いて，$n-1$ 次元空間に落とせば，「平面図形」は $n-1$ 次元空間における $n-1$ 次元の「立体図形」となります。

これより，S_j は V_n と同様にして，

$$S_j=\frac{1}{(n-1)!}〔a_j〕 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \quad \cdots\cdots ③$$

と求められます。

よって，②，③から，

$$S^2={S_1}^2+{S_2}^2+\cdots\cdots+{S_n}^2$$

が成り立つことが分かりました。

《参考文献》

〔1〕 改訂版 教科書傍用 4STEP 数学B 数研出版 平成 12 年 2 月 1 日発行

（東京都立調布南高等学校）