数論の練習問題から

柳田（やなぎた）　五夫（いつお）

§1. はじめに

David A.SANTOS の Number Theory for Mathematical Contests には興味深い練習問題が載せられている。その中から 2 題取り上げてみた。

問題 1　（〔1〕の練習 61）
フィボナッチ数列 $\{f_n\}$ に対して，次の等式を証明せよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{1}{f_{2n+1}}=\frac{\pi}{4}$$

問題 2　（〔1〕の練習 35 (8a)）
a_1，a_2，…，a_n を相異なる正の実数とし，$s=a_1+a_2+\cdots+a_n$ とおくとき，次の不等式を証明せよ。

$$(n-1)\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{s-a_r}<\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{a_r}$$

§2. フィボナッチ数列 $\{f_n\}$ の性質

数列 $\{f_n\}$ が漸化式

$$f_0=0,\ f_1=1,\ f_{n+2}=f_{n+1}+f_n\ (n\geqq 0)$$

を満たすとき，フィボナッチの数列と呼ばれている。

この数列を具体的に書き出してみると

0，1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，
89，144，…

となる。

$\{f_n\}$ の一般項は，$x^2=x+1$ の解を $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと $f_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$ となる。

問題 1 を解くための準備として，フィボナッチ数列 $\{f_n\}$ の性質を調べておく。

フィボナッチ数列の性質
フィボナッチ数列 $\{f_n\}$ に対して，次の等式が成り立つ。

(1)　$f_{n-1}f_{n+1}-f_n{}^2=(-1)^n$　$(n\geqq 1)$

(2)　$f_{n+1}{}^2-f_nf_{n+1}-f_n{}^2=(-1)^n$　$(n\geqq 0)$

(3)　$f_n=\dfrac{f_{n+1}f_{n+2}-(-1)^n}{f_{n+1}+f_{n+2}}$　$(n\geqq 0)$

［証明］　(1)　$f_{n-1}=f_n-f_{n-2}$，$f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$ を用いると

$$\begin{aligned}f_{n-1}f_{n+1}-f_n{}^2&=(f_n-f_{n-2})(f_n+f_{n-1})-f_n{}^2\\&=-f_{n-2}f_n+f_{n-1}(f_n-f_{n-2})\\&=-f_{n-2}f_n+f_{n-1}{}^2\\&=-(f_{n-2}f_n-f_{n-1}{}^2)\end{aligned}$$

となる。$\{f_{n-1}f_{n+1}-f_n{}^2\}$ は初項 $f_0f_2-f_1{}^2=-1$，公比 -1 の等比数列だから

$f_{n-1}f_{n+1}-f_n{}^2=(-1)^n$ を得る。

(2)　$f_{n-1}f_{n+1}-f_n{}^2=(-1)^n$ に $f_{n-1}=f_{n+1}-f_n$ を使うと $(f_{n+1}-f_n)f_{n+1}-f_n{}^2=(-1)^n$ すなわち $f_{n+1}{}^2-f_nf_{n+1}-f_n{}^2=(-1)^n$ を得る。

(3)　$f_{n+1}{}^2-f_nf_{n+1}-f_n{}^2=(-1)^n$ を変形する。

$$\begin{aligned}f_{n+1}{}^2-f_n{}^2&=(f_{n+1}-f_n)(f_{n+1}+f_n)\\&=(f_{n+1}-f_n)f_{n+2}\end{aligned}$$

だから $f_{n+1}{}^2-f_nf_{n+1}-f_n{}^2=(-1)^n$ は

$$(f_{n+1}-f_n)f_{n+2}-f_nf_{n+1}=(-1)^n$$

すなわち $f_n(f_{n+1}+f_{n+2})=f_{n+1}f_{n+2}-(-1)^n$ となる。$f_{n+1}+f_{n+2}>0$ だから

$$f_n=\frac{f_{n+1}f_{n+2}-(-1)^n}{f_{n+1}+f_{n+2}}$$

を得る。■

定理１　nを正の整数とするとき，次の等式が成り立つ。

(1)　$\tan^{-1}\dfrac{1}{f_{2n}}=\tan^{-1}\dfrac{1}{f_{2n+1}}+\tan^{-1}\dfrac{1}{f_{2n+2}}$

(2)　$\tanh^{-1}\dfrac{1}{f_{2n-1}}=\tanh^{-1}\dfrac{1}{f_{2n}}+\tanh^{-1}\dfrac{1}{f_{2n+1}}$

［証明］(1)　**フィボナッチ数列の性質** (3)より

$$f_{2n}=\frac{f_{2n+1}f_{2n+2}-1}{f_{2n+1}+f_{2n+2}}$$

が成り立つ。逆数をとると

$$\frac{1}{f_{2n}}=\frac{f_{2n+1}+f_{2n+2}}{f_{2n+1}f_{2n+2}-1}=\frac{\dfrac{1}{f_{2n+1}}+\dfrac{1}{f_{2n+2}}}{1-\dfrac{1}{f_{2n+1}}\cdot\dfrac{1}{f_{2n+2}}}$$

となる。$\tan^{-1}\dfrac{1}{f_{2n}}=x$，$\tan^{-1}\dfrac{1}{f_{2n+1}}=y$，$\tan^{-1}\dfrac{1}{f_{2n+2}}=z$ とおくと，この式は

$$\tan x=\frac{\tan y+\tan z}{1-\tan y\tan z}$$

と書き直すことができるから，加法定理を使うと

$$\tan x=\tan(y+z)$$

となる。$0<x$，y，$z\leqq\dfrac{\pi}{4}$ だから $x=y+z$ を得る。■

(2)　**フィボナッチ数列の性質** (3)より

$$f_{2n-1}=\frac{f_{2n}f_{2n+1}+1}{f_{2n}+f_{2n+1}}$$

が成り立つ。逆数をとると

$$\frac{1}{f_{2n-1}}=\frac{f_{2n}+f_{2n+1}}{f_{2n}f_{2n+1}+1}=\frac{\dfrac{1}{f_{2n}}+\dfrac{1}{f_{2n+1}}}{1+\dfrac{1}{f_{2n}}\cdot\dfrac{1}{f_{2n+1}}}$$

となる。$\tanh^{-1}\dfrac{1}{f_{2n-1}}=x$，$\tanh^{-1}\dfrac{1}{f_{2n}}=y$，$\tanh^{-1}\dfrac{1}{f_{2n+1}}=z$ とおくと，この式は

$$\tanh x=\frac{\tanh y+\tanh z}{1+\tanh y\tanh z}$$

と書き直すことができるから，加法定理を使うと

$$\tanh x=\tanh(y+z)$$

となる。$\tanh x$ は増加関数だから $x=y+z$ を得る。■

§3. 問題１の解答

［解答］ **定理１**(1)より

$$\tan^{-1}\frac{1}{f_{2n+1}}=\tan^{-1}\frac{1}{f_{2n}}-\tan^{-1}\frac{1}{f_{2n+2}}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\tan^{-1}\frac{1}{f_{2k+1}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\tan^{-1}\frac{1}{f_{2k}}-\tan^{-1}\frac{1}{f_{2k+2}}\right)\\&=\left(\tan^{-1}\frac{1}{f_2}-\tan^{-1}\frac{1}{f_4}\right)+\left(\tan^{-1}\frac{1}{f_4}-\tan^{-1}\frac{1}{f_6}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\tan^{-1}\frac{1}{f_{2n}}-\tan^{-1}\frac{1}{f_{2n+2}}\right)\\&=\tan^{-1}\frac{1}{f_2}-\tan^{-1}\frac{1}{f_{2n+2}}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5}}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}=0$$

だから

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\tan^{-1}\frac{1}{f_{2k+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\tan^{-1}\frac{1}{f_2}-\tan^{-1}\frac{1}{f_{2n+2}}\right)\\&=\tan^{-1}\frac{1}{f_2}-\tan^{-1}0=\tan^{-1}1-\tan^{-1}0\\&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\tan^{-1}\frac{1}{f_{2n+1}}=\frac{\pi}{4}$ となる。■

［注］　同様にして，**定理１** (2)より

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\tanh^{-1}\frac{1}{f_{2k}}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\tanh^{-1}\frac{1}{f_{2k-1}}-\tanh^{-1}\frac{1}{f_{2k+1}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\tanh^{-1}\frac{1}{f_3}-\tanh^{-1}\frac{1}{f_{2n+1}}\right)\\&=\tanh^{-1}\frac{1}{f_3}-\tanh^{-1}0=\tanh^{-1}\frac{1}{2}-\tanh^{-1}0\\&=\frac{1}{2}\log 3\end{aligned}$$

したがって，$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\boldsymbol{\tanh^{-1}\frac{1}{f_{2n}}=\frac{1}{2}\log 3}$ を得る。

§4. 関連する大学入試問題

> 数列 $\{a_n\}$ を　$a_1=1$，$a_2=2$，
> $$a_{n+2}=\frac{{a_{n+1}}^2+(-1)^n}{a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
> と定め，$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。
> (1)　b_1，b_2，b_3，b_4，b_5 を求めよ。
> (2)　すべての自然数 n に対して，ベクトル $(a_n,\ b_n)$ の成分が共に正の整数であることを示せ。
>
> (2011 大阪教育大)

$$a_{n+2}=\frac{{a_{n+1}}^2+(-1)^n}{a_n}\qquad\cdots\cdots①$$

$a_1=1$，$a_2=2$ だから①で $n=1$，2，3，4 とおいて a_3，a_4，a_5，a_6 を求めると，$a_3=3$，$a_4=5$，$a_5=8$，$a_6=13$ を得る。これから $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ となることが推測できる。これは数学的帰納法で証明できるが，$(-1)^n$ を消去することで解くこともできる。

①から

$$a_na_{n+2}-{a_{n+1}}^2=(-1)^n\qquad\cdots\cdots②$$
$$a_{n+1}a_{n+3}-{a_{n+2}}^2=(-1)^{n+1}\qquad\cdots\cdots③$$

②＋③から

$$a_{n+1}a_{n+3}-{a_{n+1}}^2+a_na_{n+2}-{a_{n+2}}^2=0$$
$$a_{n+1}(a_{n+3}-a_{n+1})=a_{n+2}(a_{n+2}-a_n)$$

$a_n\neq 0$（$n=1$，2，3，$\cdots$）だから

$$\frac{a_{n+3}-a_{n+1}}{a_{n+2}}=\frac{a_{n+2}-a_n}{a_{n+1}}\quad（n によらず一定）$$

となる。したがって

$$\frac{a_{n+2}-a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_3-a_1}{a_2}=1$$

から $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ が得られる。

［注］　$a_n=f_{n+1}$ となっている。

§5. 問題 2 の解答

ここでは，新しい解法を紹介したい。

［解 1］　証明すべき不等式は，

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{s-a_r}<\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(n-1)a_r}$ であるから，

$$\boldsymbol{f(x)=\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{(n-1)a_r}}{(n-1)a_r}-\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{s-a_r}}{s-a_r}}\quad (x\geqq 0)$$

おくと

$$f'(x)=\sum_{r=1}^{n}x^{(n-1)a_r-1}-\sum_{r=1}^{n}x^{s-a_r-1}$$

である。ここで，$x_r=x^{a_r-\frac{1}{n-1}}$（$1\leqq r\leqq n$）とおくと

$$\begin{aligned}x^{s-a_r-1}&=x^{a_1+\cdots+a_{r-1}+a_{r+1}+\cdots+a_n-(n-1)\cdot\frac{1}{n-1}}\\&=x^{a_1-\frac{1}{n-1}}\cdot\cdots\cdot x^{a_{r-1}-\frac{1}{n-1}}x^{a_{r+1}-\frac{1}{n-1}}\cdot\cdots\cdot x^{a_n-\frac{1}{n-1}}\\&=x_1\cdot\cdots\cdot x_{r-1}x_{r+1}\cdot\cdots\cdot x_n\end{aligned}$$

であるから

$$f'(x)=\sum_{r=1}^{n}{x_r}^{(n-1)}-\sum_{r=1}^{n}\underbrace{x_1x_2\cdots x_{r-1}x_{r+1}\cdots x_n}_{=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_r}}$$

となる。$x>0$ のとき，x_1，x_2，$\cdots$，x_n は相異なる正の数だから，相加平均と相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}&{x_2}^{n-1}+{x_3}^{n-1}+\cdots+{x_n}^{n-1}\\&>(n-1)\sqrt[n-1]{{x_2}^{n-1}{x_3}^{n-1}\cdots{x_n}^{n-1}}\\&=(n-1)x_2x_3\cdots x_n\end{aligned}$$

すなわち

$${x_2}^{n-1}+{x_3}^{n-1}+\cdots+{x_n}^{n-1}>(n-1)x_2x_3\cdots x_n$$

が成り立つ。

同様にして

$${x_1}^{n-1}+{x_3}^{n-1}+\cdots+{x_n}^{n-1}>(n-1)x_1x_3\cdots x_n$$
$$\cdots\cdots$$
$${x_1}^{n-1}+{x_2}^{n-1}+\cdots+{x_{n-1}}^{n-1}>(n-1)x_1x_2\cdots x_{n-1}$$

が成り立つ。これら n 個の不等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}&(n-1)({x_1}^{n-1}+{x_2}^{n-1}+\cdots+{x_n}^{n-1})\\&>(n-1)(x_2x_3\cdots x_n+x_1x_3\cdots x_n+\cdots+x_1x_2\cdots x_{n-1})\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}&{x_1}^{n-1}+{x_2}^{n-1}+\cdots+{x_n}^{n-1}\\&>x_2x_3\cdots x_n+x_1x_3\cdots x_n+\cdots+x_1x_2\cdots x_{n-1}\end{aligned}$$

となるから，$x>0$ のとき $f'(x)>0$ が成り立つ。
よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ において増加関数で，$x>0$ のとき $f(x)>f(0)=0$ となる。
したがって，$x=1$ とおいた $f(1)>0$ から題意の不等式が成り立つ。■

［解 2］　対称性から $a_1>a_2>\cdots>a_n$ と仮定しても一般性を失わない。$1\leqq k\leqq n-1$ とする。

$$s_k=ka_k+a_{k+1}+\cdots+a_n,$$

$$f(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{a_r}-(n-1)\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{s-a_r},$$

$$\begin{aligned}f_k(a_k)&=f\Bigl(\underbrace{a_k,a_k,\cdots,\ a_k}_{k},\ a_{k+1},\ \cdots,\ a_n\Bigr)\\&=\frac{k}{a_k}+\sum_{r=k+1}^{n}\frac{1}{a_r}-(n-1)\frac{k}{s_k-a_k}\\&\quad-(n-1)\sum_{r=k+1}^{n}\frac{1}{s_k-a_r},\end{aligned}$$

$$f_n(a_n)=f(a_n,\ a_n,\ \cdots,\ a_n)=0$$

とおく。$\dfrac{ds_k}{da_k}=k$ で，$a_1>a_2>\cdots>a_n$ だから

$$(n-1)a_k>(k-1)a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n,$$

$$(n-1)a_k>s_k-a_r=ka_k+a_{k+1}+\cdots+a_n-a_r \quad (k+1\leqq r\leqq n-1)$$

となることを使うと

$$f_k'(a_k)$$

$$=-\underbrace{\frac{k}{{a_k}^2}}_{=\frac{(k-1)k}{(n-1){a_k}^2}+\frac{(n-k)k}{(n-1){a_k}^2}}+\frac{(n-1)k(k-1)}{\{(k-1)a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n\}^2}+(n-1)\sum_{r=k+1}^{n}\frac{k}{(s_k-a_r)^2}$$

$$=\frac{(n-1)k(k-1)}{\{(k-1)a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n\}^2}-\frac{(k-1)k}{(n-1){a_k}^2}+\sum_{r=k+1}^{n}\frac{(n-1)k}{(s_k-a_r)^2}-\frac{(n-k)k}{(n-1){a_k}^2}$$

$$=\frac{(n-1)k(k-1)}{\{(k-1)a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n\}^2}-\frac{(k-1)k}{(n-1){a_k}^2}+\sum_{r=k+1}^{n}\left\{\frac{k(n-1)}{(s_k-a_r)^2}-\frac{k}{(n-1){a_k}^2}\right\}$$

$$=\frac{k(k-1)[(n-1)^2{a_k}^2-\{(k-1)a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n\}^2]}{(n-1){a_k}^2\{(k-1)a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n\}^2}+k\sum_{r=k+1}^{n}\frac{(n-1)^2{a_k}^2-(s_k-a_r)^2}{(n-1){a_k}^2(s_k-a_r)^2}>0$$

となる。

$a_k>a_{k+1}$ より

$f_k(a_k)>f_k(a_{k+1})=f_{k+1}(a_{k+1})$ $(1\leqq k\leqq n-1)$

で，$f(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)=f_1(a_1)>f_2(a_2)>\cdots>f_n(a_n)=0$ がいえるから $f(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)>0$ が示された。 ■

《参考文献》

〔1〕 David A.SANTOS, *Number Theory for Mathematical Contests*

（元　栃木県立佐野高等学校）