格子平行四辺形とピックの公式

才野瀬（さいのせ） 一郎（いちろう）

§1. はじめに

a，b，c，d は整数とし，２つのベクトル $\vec{u}=(a,\ b)$，$\vec{v}=(c,\ d)$ は一次独立，すなわち $\varDelta=ad-bc\neq 0$ とする。

このとき，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ を２辺とする平行四辺形の内部と，周の一部を合わせた領域を

$$\ll\vec{u},\ \vec{v}\gg=\{(x,\ y)=s\vec{u}+t\vec{v}\mid 0\leqq s<1,\ 0\leqq t<1\}$$

と定義し，$D=\ll\vec{u},\ \vec{v}\gg$ とおく。(図１)

D の面積 S は，参考文献〔２〕により

$$S=|\varDelta|=|ad-bc|$$

である。さらに，D に属する格子点の個数を L として，次の主題を考える。ここで，x，y ともに整数となる点 $(x,\ y)$ を格子点という。

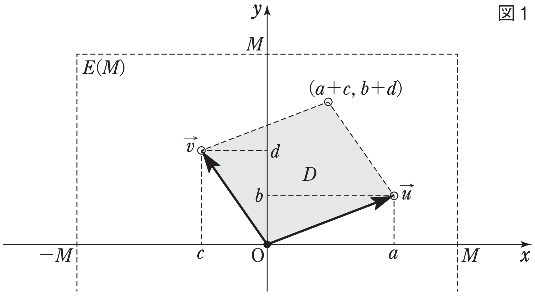


図１

[主題]　$L=S$ である。実際，これを§２および§３において２通りの方法で証明する。

さらに応用として，ピックの公式を示す。

§2. 格子正方形を用いる証明

［１］　さらに，整数 i，j に対して領域 D を $i\vec{u}+j\vec{v}$ だけ平行移動した領域

$$\{(x,\ y)=(i+s)\vec{u}+(j+t)\vec{v}\mid 0\leqq s<1,\ 0\leqq t<1\}$$

を $D(i,\ j)$ と表す。(図２)

各 $D(i,\ j)$ は $D=D(0,\ 0)$ と合同で同数の格子点を含む。また，相異なる $D(i,\ j)$ は互いに共通部分をもたず，すべての $D(i,\ j)$ は平面全体を覆い尽くす ……① ことに注意する。

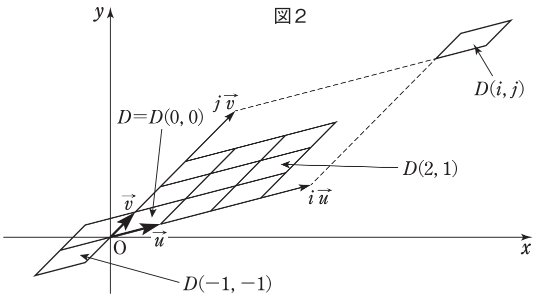


図２

［２］　n を自然数として，格子正方形を

$$E(n)=\{(x,\ y)\mid -n\leqq x\leqq n,\ -n\leqq y\leqq n\}$$

とおくと，$E(n)$ に属する格子点の個数は $(2n+1)^2$ であり，面積は $4n^2$ である。

ここで，$D\subset E(M)$ ……②　(図１)

となる十分大きな自然数 M を１つ固定する。

すると，$(x_k,\ y_k)\in D$ $(k=1,\ 2)$ ならば

$$|x_1-x_2|\leqq 2M,\ |y_1-y_2|\leqq 2M$$

である。平行移動を考えると，

$(x_k,\ y_k)\in D(i,\ j)$ $(k=1,\ 2)$ ならば

$$|x_1-x_2|\leqq 2M,\ |y_1-y_2|\leqq 2M \quad \cdots\cdots③$$

も成り立つ。

［３］　$D(i,\ j)\cap E(2Mn)\neq\varnothing$ となる $D(i,\ j)$ の個数を e_n，それらの和集合を G_n とすると，

$$E(2Mn)\subset G_n\subset E(2M(n+1)) \quad \cdots\cdots④$$

である。(n は自然数)

実際，①により左側の包含関係が成り立つ。

他方，$\mathrm{P}(x,\ y)\in G_n$ ならば，$\mathrm{P}\in D(i,\ j)$ かつ $D(i,\ j)\cap E(2Mn)\neq\varnothing$ となる $D(i,\ j)$ が存在するので，$\mathrm{Q}(z,\ w)\in D(i,\ j)\cap E(2Mn)$ となる点Qがとれる。

P，$\mathrm{Q}\in D(i,\ j)$ より $|x-z|\leqq 2M$ であり（∵③），$\mathrm{Q}\in E(2Mn)$ より $|z|\leqq 2Mn$ となるから，

$$|x|\leqq|x-z|+|z|\leqq 2M+2Mn=2M(n+1)$$

同様に，$|y|\leqq 2M(n+1)$ より $\mathrm{P}\in E(2M(n+1))$ となり，右側の包含関係も成り立つ。

すると④から，格子点の個数と面積について

$$(2Mn+1)^2 \leqq e_nL \leqq \{2M(n+1)+1\}^2$$

$$(2Mn)^2 \leqq e_nS \leqq \{2M(n+1)\}^2$$

が成り立つ。これらの比をとると

$$\frac{(2Mn+1)^2}{\{2M(n+1)\}^2} \leqq \frac{e_nL}{e_nS} \leqq \frac{\{2M(n+1)+1\}^2}{(2Mn)^2}$$

$$\therefore \quad \left\{1-\frac{2M-1}{2M(n+1)}\right\}^2 \leqq \frac{L}{S} \leqq \left(1+\frac{2M+1}{2Mn}\right)^2$$

ここで $n \to \infty$ のとき

$\left\{1-\frac{2M-1}{2M(n+1)}\right\}^2 \to 1$，$\left(1+\frac{2M+1}{2Mn}\right)^2 \to 1$ より

$\frac{L}{S}=1$ すなわち $L=S$ が従う。

§3. 1次変換を用いる証明

§1の通り，$\vec{u}$，$\vec{v}$ および $\varDelta$，D，S，L を定め，a，b の最大公約数を g とおく。

［1］ $g=1$ の場合

$am+bn=1$ となる整数 m，n が存在する（参考文献〔1〕）。このとき，行列 $A=\begin{pmatrix} m & n \\ -b & a \end{pmatrix}$ により定義される1次変換を考えると，

$$A\vec{u}=\begin{pmatrix} m & n \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{v}=\begin{pmatrix} m & n \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cm+dn \\ \varDelta \end{pmatrix}$$

となる。$A\vec{u}$ と $A\vec{v}$ で定義される領域を§1のように $D'=\langle\!\langle A\vec{u},\ A\vec{v} \rangle\!\rangle$（図3）とすると，$A$の逆行列 $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & -n \\ b & m \end{pmatrix}$ が存在するから，A と A^{-1} の表す1次変換はDと D' の間の全単射を与える。さらに，A と A^{-1} の各成分が整数だから，A と A^{-1} はDと D' の格子点についても全単射を与える。特に，D と D' の格子点の個数は等しい。さらに，平行四辺形 D' は底辺の長さが1で高さが $|\varDelta|$ だから，D' の面積は $|\varDelta|$ である。また，

$\varDelta>0$ のときは　$0 \leqq k < \varDelta$

$\varDelta<0$ のときは　$\varDelta < k \leqq 0$

となる各整数kに対して，D' と直線 $y=k$ の共通部分は $\{(x,\ k) \mid e \leqq x < e+1\}$ と表せる。
区間 $e \leqq x < e+1$ の中に整数xがただ1つ存在するから，共通部分の中には格子点が1個だけある。
kに関する和をとると，D' には格子点が $|\varDelta|$ 個あることがわかり，Dの格子点の個数も
$|\varDelta|=S$ である。

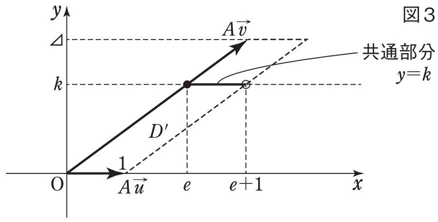


図3

［2］ 一般の g の場合

整数 $\frac{a}{g}$，$\frac{b}{g}$ の最大公約数は1である。

$\frac{1}{g}\vec{u}=\left(\frac{a}{g},\ \frac{b}{g}\right)$，$\vec{v}=(c,\ d)$ で定まる領域を

$D''=\left\langle\!\!\left\langle \frac{1}{g}\vec{u},\ \vec{v} \right\rangle\!\!\right\rangle$ とすると，D'' の面積と格子点の個数は［1］により

$$\left|\frac{a}{g}d-\frac{b}{g}c\right|=\frac{|ad-bc|}{g}=\frac{|\varDelta|}{g}$$

である。Dは g 個の領域 $D''=D''(0,\ 0)$，$D''(1,\ 0)$，$D''(2,\ 0)$，……，$D''(g-1,\ 0)$ の和集合であり，相異なる $D''(k,\ 0)$ は互いに共通部分をもたず，
$D''(k,\ 0)$ に含まれる格子点の個数と面積はともに D'' のそれと等しい（§2）。したがって，Dの面積と格子点の個数はともに $\frac{|\varDelta|}{g}\times g=|\varDelta|$ となる。

§4. ピックの公式

n 個の格子点 P_1，P_2，……，P_n を順に結んでできる n 角形Kにおいて，その内部と周を合わせた領域を格子 n 角形 $K=\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\cdots\cdots\mathrm{P}_n$ と表す
（凸でなくても良いが穴はないとする）。
このとき，Kの内部にある格子点数を a，周上の格子点数を b，面積を S とすると，次のピックの公式が成り立つことが知られている。

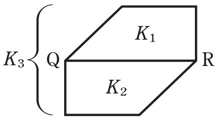
$$S=a+\frac{b}{2}-1 \quad \text{（参考文献〔3〕）}$$

この節では格子平行四辺形と格子三角形が，次節では一般の格子多角形が，ピックの公式を満たすことを証明しよう。

以下，線分，辺，対角線，折れ線は両端も含むものとし，線分 PQ の点Qを除く部分を線分 PQ)，両端を除く部分を線分 (PQ) と表す。辺，対角線，折れ線の場合も同様とする。

［**命題1**］　基本的な性質

格子多角形 $K_3=\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\cdots\cdots\mathrm{P}_n$ の真の対角線QR（対角線 (QR) が K_3 の内部にある）により2つの格子多角形 K_1 と K_2 に分かれるとき，各 K_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ の面積を S_i，内部の格子点数を a_i，周の格子点数を b_i と表す。



すると，ピックの公式 $S_i=a_i+\dfrac{b_i}{2}-1$ について

(1)　K_1 と K_2 がピックの公式を満たせば，K_3 もピックの公式を満たす。

(2)　K_3 がピックの公式を満たし，対角線QRの中点Eに関して K_1 と K_2 が点対称ならば，K_1 と K_2 がピックの公式を満たす。

証明　(1)　両端も含めて，対角線QR上に格子点が m 個あるとすると，

$$a_3=a_1+a_2+(m-2)\quad\cdots\cdots①$$

また，K_i $(i=1,\ 2)$ の周にある格子点で対角線QR上にないものを c_i 個とすると

$$b_i=c_i+m\ (i=1,\ 2)\quad\cdots\cdots②$$

$$b_3=c_1+c_2+2\quad\cdots\cdots③$$

ここで，面積の等式 $S_3=S_1+S_2$ に仮定と①，②，③を用いて

$$S_3=\left(a_1+\frac{1}{2}b_1-1\right)+\left(a_2+\frac{1}{2}b_2-1\right)$$

$$=a_1+a_2+\frac{1}{2}(c_1+m+c_2+m)-2$$

$$=a_1+a_2+m-2+\frac{1}{2}(c_1+c_2+2)-1$$

$$=a_3+\frac{1}{2}b_3-1$$

(2)　線分QRの中点Eは $\left(\dfrac{\text{整数}}{2},\ \dfrac{\text{整数}}{2}\right)$ と表せるから，K_1 の格子点と K_2 の格子点は互いにEに関して対称となり，$S_1=S_2=\dfrac{1}{2}S_3$，$a_1=a_2$，$b_1=b_2$，$c_1=c_2$ である。

仮定と①，②，③により

$$S_3=a_3+\frac{1}{2}b_3-1$$

$$=(a_1+a_2+m-2)+\frac{1}{2}(c_1+c_2+2)-1$$

$$=2a_1+m+c_1-2$$

両辺を2で割ると

$$S_1=a_1+\frac{1}{2}(m+c_1)-1=a_1+\frac{1}{2}b_1-1$$

S_2 に関しても同様。

［**命題2**］　格子平行四辺形と格子三角形はピックの公式を満たす。

証明　格子多角形を x 軸方向，y 軸方向ともに整数値だけ平行移動しても，移動の前後で S，a，b の値は変わらない。したがって，$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ と $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ が格子点のときの(ア)平行四辺形OACBと(イ)△OABの場合を示せば十分。

(ア)　x_1 と y_1 の最大公約数を g，x_2 と y_2 の最大公約数を h とする。格子点は，辺OA) 上に g 個，辺OB) 上に h 個，平行四辺形の周上に $b=2g+2h$ 個，折れ線 (AOB) 上に $f=g+h-1$ 個存在することがわかる。さらに主題から

$$S=L=a+f=a+g+h-1=a+\frac{b}{2}-1$$

(イ)　$K_1=$△OAB，$K_2=$△CBA，$K_3=$平行四辺形OACB とすると，対角線ABの中点Eが命題1(2)の仮定を満たす。

§5. ピックの公式の証明

［**命題3**］　格子 n 角形 $K=\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\cdots\cdots\mathrm{P}_n$ について

(1)　$n\geqq 4$ のとき，K には真の対角線が存在する。

(2)　K はピックの公式を満たす。

証明　(1)　K の頂点を $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$ とおく。y_k の最小値を y_1 として，K は領域 $y\geqq y_1$ に含まれるとして一般性を失わない。また，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の内部を I，線分 $(\mathrm{P}_n\mathrm{P}_2)$ を J とおくと，y_1 の最小性により次が成り立つ。

『$\mathrm{Q}\in I\cup J$ のとき，直線 QP_1 の $y<y_1$ の部分は K の外部にある。したがって，L を線分 QP_1) または線分 (QP_1) とするとき，L 上に K の周上の点がなければ，L は K の内部にある。』……①

次に，平面上の点Pに対して，Pを通り J に平行な直線と点 P_1 との距離を $d(\mathrm{P})$ とおくと，

『K のある辺CD上の点Pが $I\cup J$ に属するとき，必要があればCとDを入れ替えると，$\mathrm{C}\in I\cup J$ かつ $d(\mathrm{C})\leqq d(\mathrm{P})$』……②

が成り立つ。

実際，Pが I に属するとき，またはPが J に属してCDが J に平行でないときは，辺CDは折れ線 $(\mathrm{P}_n\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2)$ と共有点をもたないことから結論が従う。

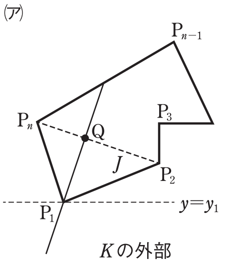
他方，Pが J に属し，CDが J に平行なときは，辺(CD)上には頂点 P_n も P_2 も存在しないから，辺CDは線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_2$ に含まれる。さらに線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_2$ は辺ではない $(n\geqq4)$ から，CまたはDの少なくとも一方は J に属する。

以下，頂点 P_k $(3\leqq k\leqq n-1)$ について，

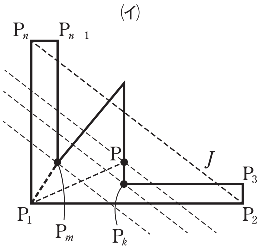
(ア) どの頂点も $I\cup J$ に属さない場合；
②より $I\cup J$ は K の周上の点をもたないから，J の各点Qに対して線分 QP_1) も K の周上の点をもたない。すると，①により線分 QP_1) は(特に点Qは) K の内部となる。よって，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_2$ が真の対角線。

(イ) ある頂点が $I\cup J$ に属する場合；
このような頂点 P_k の中で，$d(\mathrm{P}_k)$ が最小となる点 P_k の1つを P_m とする。すると，$I\cup J$ に属する K の周上の点Pに対しては，②より
$d(\mathrm{P})\geqq d(\mathrm{P}_k)\geqq d(\mathrm{P}_m)$ となる頂点 P_k が存在する。
他方，線分 $(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_m)$ 上の各点Pは $d(\mathrm{P})<d(\mathrm{P}_m)$ を満たすので，線分 $(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_m)$ は K の周上の点をもたず，①により K の内部にある。よって，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_m$ が真の対角線。

(ア)



(イ)



(2) n に関する帰納法を用いる。

まず，$n=3$ のときは命題2による。

次に $n\geqq4$ として，n 未満の頂点をもつ格子多角形はピックの公式を満たすと仮定する。(1)から，真の対角線により K が2つの多角形 K_1 と K_2 に分かれるが，K_1 と K_2 の頂点数は n 未満より，帰納法の仮定から共にピックの公式を満たす。命題1(1)によれば，K もピックの公式を満たす。

§6. おわりに

主題については前任校の同僚の永井講師と考えて2つの証明を得ていたが，後に参考文献〔3〕を著者の日比孝之教授（大阪大学）からいただく機会があり，主題とピックの公式の関連性を知ることができた。ここで教授と元同僚に感謝の意を表したい。

また，格子点と面積が関係する問題は大学入試においてもよく出題されている。2017年度では地元の広島大学理系第5問にある。

《参考文献》

〔1〕 改訂版チャート式　基礎からの数学Ⅰ＋A　数研出版　P512

〔2〕 新課程チャート式　基礎からの数学Ⅱ＋B　数研出版　P131，P376

〔3〕 日比孝之著　証明の探究　大阪大学出版会　P113～135

（広島県　広島市立基町高等学校）