

半径 R の外接円と半径 r の内接円をもつ 三角形を作図しよう

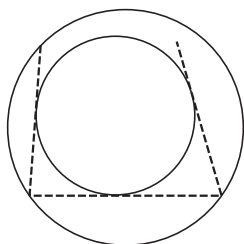
～外接円と内接円の関係 オイラー・チャップルとポンスレー～

しま あつし
島 淳志

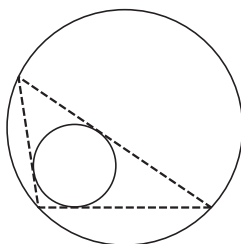
§1. はじめに

与えられた三角形に対し、外接円の半径と内接円の半径を求める問題は容易である。しかし、与えられた外接円の半径と内接円の半径をもつ三角形の作図はどうだろうか。

例えば、外接円の半径に対し、内接円の半径が大きすぎると三角形は描けない。



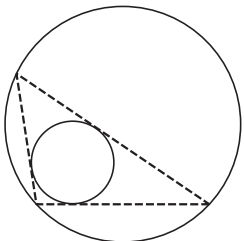
内接円が大きいと描くことができない



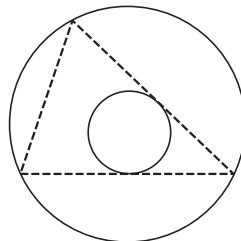
内接円が十分小さいと三角形が描ける

§2. 内接円、外接円の位置関係は？

さらに、三角形の描ける内接円の半径を探索しても、内接円の位置によって三角形が描けない場合もある。



ある位置で三角形が描けても…



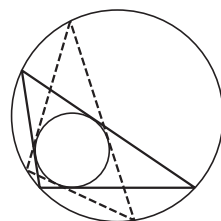
場所を変えると三角形が描けなくなる場合も

実は、三角形の外接円の半径を R 、内接円の半径を r 、外心と内心の距離を d とするとき、

$d^2 = R^2 - 2Rr$ (オイラー・チャップルの定理) が成り立つ。この関係式を満たすときのみ、三角形を描くことができるのである。

§3. 新たな三角形が描ける？

さらに加えると……



§2 で外接円と内接円の位置、半径を決めると、実はその位置の外接円と内接円をもつ新たな三角形を上図のように描くことができる。このような三角形は無数に描ける。これは、ポンスレーの閉形定理の特別な場合として知られている。

§4. 三角形の内心の軌跡を考える

§2, 3 で紹介した定理を自力で証明するのは非常に難しい。そこで、平成 29 年度京都大学理系の入試問題をもとに、まずは三角形が描ける外接円と内接円の位置を探す方法を考えてみよう。

【平成 29 年度 京都大学 理系 第 4 問】

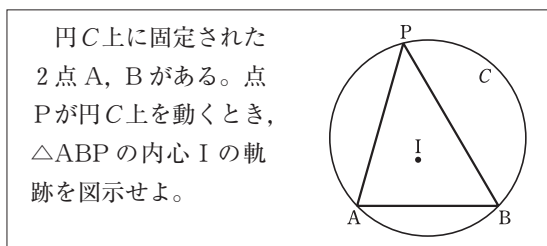
$\triangle ABC$ は鋭角三角形であり、 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ であるとする。また、 $\triangle ABC$ の外接円の半径は 1 であるとする。

(1) $\triangle ABC$ の内心を P とするとき、 $\angle BPC$ を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の内接円の半径 r のとりうる値の範囲を求めよ。

解答 (1) $\angle BPC = \pi - (\angle PBC + \angle PCB)$
 $= \pi - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$
 $= \pi - \frac{1}{2}(\pi - \angle A)$
 $= \pi - \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi$

実は、この問題に三角形の内心の位置を知るヒントが隠されている。次の問題を考えてみよう。



$\angle AIB$ の大きさは、京大の問題と同様の計算で大きさが $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle APB$ で一定となるので、円周角の定理の逆から、点Iは線分ABを弦とする円周上の点である。では、この点Iの軌跡を描く円の中心はどこだろうか。

今、 $\triangle ABP$ が二等辺三角形になる場合を考える。このときの点Pを P_0 、 $\triangle ABP_0$ の内心を I_0 とおく。

$\angle P_0AB = \angle P_0BA$ であることと、 AI_0 , BI_0 はそれぞれ $\angle BAP_0$, $\angle ABP_0$ の二等分線であることから、 $\angle P_0AI_0 = \angle I_0BI_0$ となる。

したがって、接弦定理の逆より、直線 AP_0 は、 $\triangle ABI_0$ の外接円の接線であり、直線 AP_0 は点Iの軌跡を描く円の接線である。

ここで、点Iの軌跡を描く円の中心をDとする。直線 AP_0 は接線より、 $\angle DAP_0 = \frac{\pi}{2}$ となるが、 A , P_0 は $\triangle ABP$ の外接円上より、線分 DP_0 はこの外接円の直径である。

したがって、点Dは、 $\triangle ABP$ の外接円の弧AB上の点で、点Pを含まない側にあり、さらに、弧ABを2等分する点であることもわかる。

図では点Pを、直線ABに対して上方の側のみ描いたが、下方の側に描いた場合、内心の軌跡は直線

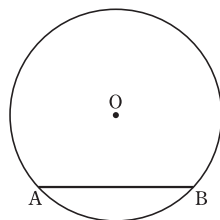
ABの下方になる。すなわち、内心の軌跡を描く円の中心は直線ABの上方になる。

以下、円C上の固定された弦ABを1辺とし円Cを外接円とする三角形に対し、内心の軌跡の中心を弧AB上の点Dにとったとき、内心の軌跡を $I(C, A, B, D)$ と表すことにする。

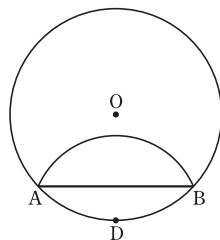
§5. 外接円と内接円から三角形を作図しよう

§4で求めた内心の軌跡を用いて、半径Rの外接円 C_R と半径rの内接円 C_r をもつ三角形を以下のように作図できる。

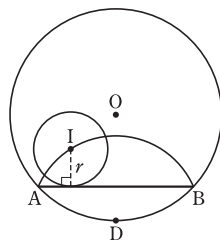
① 円 C_R を描き、円 C_R 上に2点A, Bをとる。



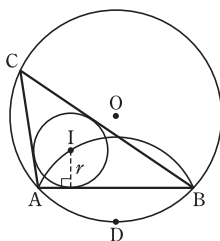
② 弧ABを2等分する点Dを中心とする、半径DAの円を描く。この円のうち、円 C_R の内部にある部分が、 $I(C_R, A, B, D)$ となる。



③ $I(C_R, A, B, D)$ 上の点のうち、線分ABとの距離がrとなる点を探し、そこを中心Iとする半径rの円 C_r を描く。



④ 最後に、2点A, Bから円 C_r へ接線を引いて点Cを定めれば、 $\triangle ABC$ は、半径Rの外接円と半径rの内接円をもつ三角形となる。



§6. オイラー・チャップルの定理への準備

§5で、OIの長さを求めよう。準備として、次の補題を示す。

2円 C_1 , C_2 が交点をもつとき、2円の交点を通る直線を $\ell(C_1, C_2)$ と表すことにする。ただし、2円が接するとき、 $\ell(C_1, C_2)$ は接点での円の接線を表すものとする。

補題 1 半径が $R, R' (R > R')$ である 2 つの同心円 $C_R, C_{R'}$ と、 C_R 上に中心をもつ半径 a の円 C_a を考える。このとき、2 直線 $\ell(C_R, C_a)$ と $\ell(C_{R'}, C_a)$ は平行であり、その距離は a の値にかかわらず一定である。

証明 $C_R: x^2 + y^2 = R^2 \dots\dots\dots ①$

$C_{R'}: x^2 + y^2 = R'^2 \dots\dots\dots ②$

$C_a: x^2 + (y + R)^2 = a^2 \dots\dots\dots ③$ とする。

$\ell(C_R, C_a)$ の方程式は、

③-① を整理して、

$$y = \frac{a^2 - 2R^2}{2R}$$

また、 $\ell(C_{R'}, C_a)$ の方程式は、

③-② を整理して、

$$y = \frac{a^2 - R^2 - R'^2}{2R}$$

よって、2 つの直線は平行であり、その距離は、

$$\frac{a^2 - R^2 - R'^2}{2R} - \frac{a^2 - 2R^2}{2R} = \frac{R^2 - R'^2}{2R}$$

この値は a の値によらず常に一定である。**終**

この補題 1 から、次が直ちに導ける。

系 1 半径が $R, \sqrt{R^2 - 2Rr}$ である 2 つの同心円 C_1, C_2 と、 C_1 上に中心をもつ円 C_3 がある。このとき、 $\ell(C_1, C_3), \ell(C_2, C_3)$ の距離は r である。

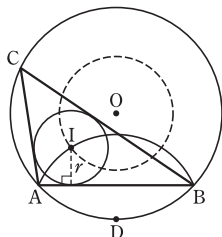
§7. $d^2 = R^2 - 2Rr$ の証明

オイラー・チャップルの定理は補題 1 から直ちに示すことができる。

定理 1 (オイラー・チャップルの定理)

与えられた三角形の外接円の半径を R 、内接円の半径を r 、外心と内心の距離を d とするとき、 $d^2 = R^2 - 2Rr$ が成り立つ。

証明 与えられた三角形を $\triangle ABC$ とし、 $\triangle ABC$ の外心を O 、内心を I とおく。また、外接円を C_R 、内接円を C_r とする。また、弧 AB (点 C を含まない側) を 2 等分する点を D とする。



点 O 中心、半径 d の円 C_d を考えると、2 直線 $\ell(C_R, I(C_R, A, B, D)), \ell(C_d, I(C_R, A, B, D))$ の距離は、補題 1 より $\frac{R^2 - d^2}{2R}$ となる。

(ここでは、 $I(C_R, A, B, D)$) は内心の軌跡を含む円全体を表すものとする。)

したがって、 $\frac{R^2 - d^2}{2R} = r$ より、 $d^2 = R^2 - 2Rr$ が成り立つ。**終**

§8. ポンスレーの閉形定理へ

最後にポンスレーの閉形定理について考える。

定理 2 (ポンスレーの閉形定理)

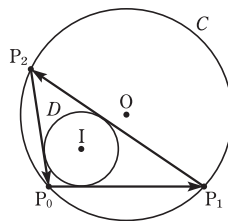
2 つの円 C, D がある。 C 上の点 P_0 から D へ接線 ℓ_1 を引く。 ℓ_1 と D との交点を P_0, P_1 とする。 P_1 から D へ ℓ_1 と異なる接線 ℓ_2 を引く。 ℓ_2 と C との交点を P_1, P_2 とする。 P_2 から D へ ℓ_2 と異なる接線 ℓ_3 を引く。 ℓ_3 と C との交点を P_2, P_3 とする。以下、これを続ける；

$P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow \dots\dots$

もしも、 $P_n = P_0$ だとすると、 C の他の点 Q_0 から出発して同じように接線を引いて $Q_1, Q_2, \dots\dots, Q_n$ を作ると $Q_n = Q_0$ となる。

これまでのことを用いて、ポンスレーの閉形定理の $n=3$ における証明を与える。

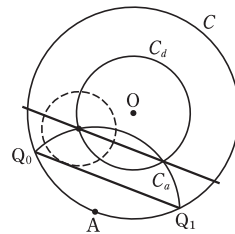
証明 円 C の中心を O 、半径を R とし、円 D の中心を I 、半径を r とする。 $P_3 = P_0$ となるとき、円 C は $\triangle P_0 P_1 P_2$ の外接円、円 D は $\triangle P_0 P_1 P_2$ の内接円となる。



よって、オイラー・チャップルの定理より、 $OI^2 = R^2 - 2Rr$ が成り立つ。

さて、定理 2 に従って 2 点 Q_0, Q_1 を定め、弧 $Q_0 Q_1$ (直線 $Q_0 Q_1$ に対し、点 I と反対側の部分) を 2 等分する点を A とおく。

$OI = d$ とし、中心 O 、半径 d の円 C_d を考えると、系 1 より 2 直線 $\ell(C, I(C, Q_0, Q_1, A)), \ell(C_d, I(C, Q_0, Q_1, A))$ の距離は r である。



点 I は円 C_d 上で直線 Q_0Q_1 からの距離が r なので、
点 I は $\ell(C_d, I(C, Q_0, Q_1, A))$ 上の点であることがわかる。

すなわち、点 I は $I(C, Q_0, Q_1, A)$ 上の点より、
線分 Q_0Q_1 を 1 辺とし、円 C を外接円、円 D を内接
円とする新たな三角形が作図できる。

この作図した三角形の第 3 の点を Q_2 とすれば、
 $Q_3=Q_0$ となる。〔終〕

《参考文献》

- 〔1〕 平成 29 年度京都大学入学試験 理系第 4 問
- 〔2〕 [http://www.nara-wu.ac.jp/fuchuko/
curriculum/study/Math/UENOkougi.pdf](http://www.nara-wu.ac.jp/fuchuko/curriculum/study/Math/UENOkougi.pdf)
(高知県 土佐高等学校)