

円錐の側面に糸を巻きつける

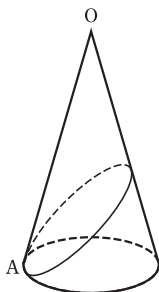
しみず だん
清水 団

§1. はじめに

高校1年生の問題集として4STEP 数学I・Aを利用しています。その中の例題で、次のような問題がありました。

【例題 47】

底面の半径を1、母線の長さ3の直円錐がある。その頂点をOとし、底面の円周上の1点をAとする。右の図のように、Aから直円錐の側面を1周してAまで糸を巻きつける。



その糸の長さが最短となるときの糸の長さを求めよ。

この図を見ていて思ったのは、

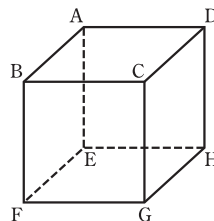
『最短で巻きつけた糸によってできる円錐の切り口はこのような形になるのだろうか?』

ということです。こうではないということは直感でわかり、切り口も平面ではないのではないかと考え、調べてみることにしました。

平面図形の問題で、答えを推測されないようにわざと図形を不正確に書くことがあります。個人的には正確な図を書いた方がいいとは思いますが、この立体の見取図はそのような意図ではなく、『描くのが難しいのでこう描いた』ということなのかなあと推察します。

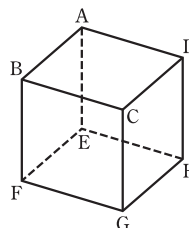
立体図形においては、『実際にはそう見えない図』というのがいくつかあります。

§2. 立方体



私も授業の板書では、このような立方体をたくさん描きました。しかし、実際に立方体はこのようには見えません。

手前の正方形BFGCが平行四辺形ではなく、正方形に見えるのであれば、奥に位置する辺もピタッと重なるはずですが。(遠近法で見ることも考えると、ややこしくなるので、平行光線で眺めるものとします。) いくつかの面が見えるように立方体を描くと、下の図のようになります。



この図は、適当に平行四辺形を組み合わせで描いているものではありません。立方体を見る方向を定めて、計算して描いています。

§3. 平面への射影

図を描くには、見る方向を決めて、その方向に垂直な平面に射影する必要があります。

1辺の長さが1の立方体ABCD-EFGHで、Eを原点、 \overrightarrow{EF} 、 \overrightarrow{EH} 、 \overrightarrow{EA} をそれぞれ、 x 軸、 y 軸、 z 軸と考えます。

鋭角 θ, ϕ を用いて $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ の方向から

原点を見た立体を平面

$$x\cos\theta\cos\phi + y\sin\theta\cos\phi + z\sin\phi = 0 \quad \dots\dots\star$$

に射影します。そして、射影した平面で、

$$\text{新しい横軸 } X \text{ の方向を } \vec{x} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{縦軸 } Y \text{ の方向を } \vec{y} = \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

とすれば、

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{x}, \vec{a} \perp \vec{y}, \vec{x} \perp \vec{y} \\ |\vec{x}| = |\vec{y}| = 1 \end{aligned}$$

となります。

(i) $E(0, 0, 0)$ の射影は $E'(0, 0, 0)$ です。

新しい座標系 XY において、

$$E(0, 0)$$

となります。

(ii) $A(0, 0, 1)$ の射影 $A'(p, q, r)$ は

$$\overrightarrow{AA'} = t\vec{a} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos\theta\cos\phi \\ t\sin\theta\cos\phi \\ t\sin\phi \end{pmatrix}$$

☆に代入して、

$$t\cos^2\theta\cos^2\phi + t\sin^2\theta\cos^2\phi + (t\sin\phi + 1)\sin\phi = 0$$

$$\therefore t\cos^2\phi + t\sin^2\phi = -\sin\phi$$

$$\therefore t = -\sin\phi$$

$$\therefore \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (\sin\phi)\vec{a}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos\theta\cos\phi\sin\phi \\ -\sin\theta\cos\phi\sin\phi \\ 1 - \sin^2\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos\theta\cos\phi\sin\phi \\ -\sin\theta\cos\phi\sin\phi \\ \cos^2\phi \end{pmatrix}$$

$$= \cos\phi \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$= 0 \cdot \vec{x} + (\cos\phi)\vec{y}$$

となり、新しい座標系 XY において、

$$A(0, \cos\phi)$$

となります。

(iii) $F(1, 0, 0)$ の射影 $F'(p, q, r)$ は

$$\overrightarrow{FF'} = -(\cos\theta\cos\phi)\vec{a} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (\cos\theta\cos\phi)\vec{a}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \cos^2\theta\cos^2\phi \\ -\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi \\ -\cos\theta\cos\phi\sin\phi \end{pmatrix}$$

$$= -\sin\theta \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- \cos\theta\sin\phi \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$= -(\sin\theta)\vec{x} - (\cos\theta\sin\phi)\vec{y}$$

となり、新しい座標系 XY において、

$$F(-\sin\theta, -\cos\theta\sin\phi)$$

となります。

(iv) $H(0, 1, 0)$ の射影 $H'(p, q, r)$ は

$$\overrightarrow{HH'} = -(\sin\theta\cos\phi)\vec{a} \text{ より、}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (\sin\theta\cos\phi)\vec{a}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi \\ 1 - \sin^2\theta\cos^2\phi \\ -\sin\theta\cos\phi\sin\phi \end{pmatrix}$$

$$= \cos\theta \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- \sin\theta\sin\phi \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$= (\cos\theta)\vec{x} - (\sin\theta\sin\phi)\vec{y}$$

となり、新しい座標系 XY において、

$$H(\cos\theta, -\sin\theta\sin\phi)$$

となります。

任意の点 $P(a, b, c)$ の射影を新しい座標系 XY で表すと

$$\overrightarrow{EP} = a\overrightarrow{EF} + b\overrightarrow{EH} + c\overrightarrow{EA}$$

$$= a \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\phi \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta\sin\phi \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -a\sin\theta + b\cos\theta \\ -a\cos\theta\sin\phi - b\sin\theta\sin\phi + c\cos\phi \end{pmatrix}$$

となります。2つ目の立方体の図は $\theta = \phi = \frac{\pi}{6}$ と

して描いています。

§4. 円錐の底面と母線

底面の円上の動点 $P(\cos t, \sin t, 0)$ の射影を新しい座標系 XY で表すと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EP} &= \begin{pmatrix} -\cos t \sin \theta + \sin t \cos \theta \\ -\cos t \cos \theta \sin \phi - \sin t \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(t-\theta) \\ -\sin \phi \cos(t-\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、 $X^2 + \frac{Y^2}{\sin^2 \phi} = 1$ の楕円となります。

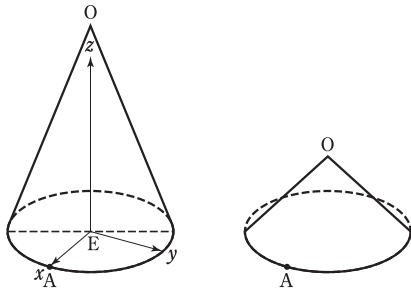
$A(1, 0, 0)$ と $O(0, 0, 2\sqrt{2})$ は新しい座標系 XY では

$$A(-\sin \theta, -\cos \theta \sin \phi), O(0, 2\sqrt{2} \cos \phi)$$

となります。立方体のときと同様に、 $\theta = \phi = \frac{\pi}{6}$ と

して、円錐を描いてみます。見える部分を

$-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$ とすると、



となりますが(左図)、この見取図は間違いです。楕円の長径の両端と O を結んでいますが、正しくは O から楕円に接するように線を引かなくてはなりません。最初はグラフィックで描く誤差かと思いましたが、右図のように O の位置を低くして描くと間違いであることがはっきりとわかります。

線分 OP 上に $Q(p, q, r)$ をとると、 $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP}$

なので
$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r-2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(\cos t - 0) \\ k(\sin t - 0) \\ k(0 - 2\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cos t \\ k \sin t \\ 2\sqrt{2}(1-k) \end{pmatrix}$$

射影を新しい座標系 XY で表すと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EQ} &= \begin{pmatrix} k \sin(t-\theta) \\ -k \sin \phi \cos(t-\theta) + 2\sqrt{2}(1-k) \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ として } k \text{ を消去し} \end{aligned}$$

$$k = \frac{X}{\sin(t-\theta)} = \frac{Y - 2\sqrt{2} \cos \phi}{-\sin \phi \cos(t-\theta) - 2\sqrt{2} \cos \phi}$$

$Y=0$ とすると

$$X = \frac{2\sqrt{2} \sin(t-\theta) \cos \phi}{\sin \phi \cos(t-\theta) + 2\sqrt{2} \cos \phi}$$

あとは t を変化させて $\max X, \min X$ となる t を求めることになります。(あとは wolfram Alpha に任せましょう。)

$$\theta = \phi = \frac{\pi}{6} \text{ として } X = \frac{2\sqrt{6} \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) + 2\sqrt{6}}$$

(i) $\min X$

$$t = \frac{\pi}{6} - 2 \arctan \sqrt{\frac{2\sqrt{6}+1}{2\sqrt{6}-1}} \doteq -1.25277$$

(ii) $\max X$

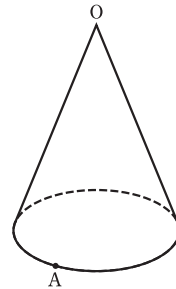
$$t = \frac{\pi}{6} + 2 \arctan \sqrt{\frac{2\sqrt{6}+1}{2\sqrt{6}-1}} \doteq 2.29996$$

$-\frac{\pi}{3} \doteq -1.04719, \frac{2\pi}{3} \doteq 2.09439$ なので、少しず

れます。見える部分を

$$-1.25277 \leq t \leq 2.29996$$

に修正して、



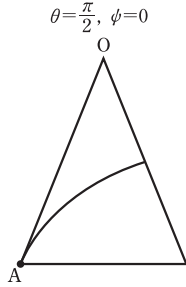
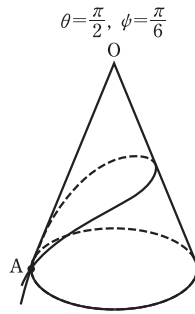
バッチリです!!!!

§5. 円錐の側面の最短経路

側面は中心角が $\frac{\pi}{3}$ のおうぎ形で、最短経路の曲線は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos t}{2 \sin\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} \\ \frac{\sin t}{2 \sin\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} \\ 2\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2 \sin\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right)}\right) \end{pmatrix}$$

となります。(新しい座標系 XY は省略)



§6. まとめ

今回の円錐の見取図を通してわかったことです。

- 円は斜めから見ると楕円に見える。
- 母線は楕円に接するように見える。(もちろん、見た目の長さは母線の長さではない。)
- 最短経路の切り口は楕円ではない。
- 最短経路の切り口は平面ではない。
- Aのところで尖っている。
- 最短経路の曲線はネクタイを結ぶ時に交差する状態に似ている。

《参考文献》

[1] 問題集 4STEP 数学 I・A 数研出版

[2] <http://www.wolframalpha.com>

(東京都 城北中学校・高等学校)