

最短時間の経路

まつだ やすお
松田 康雄

§0. はじめに

微分を使った最小問題の1つとして問題1を考えた。その結論が「屈折の法則」と関係があることに気が付いたので報告したい。

§1. 最小問題

問題1. 海岸上の点Cから50m離れた海上の点Bで、ある人が助けを求めている。Cから直線状の海岸に沿って100m離れた地点AでT君がこれを発見した。T君は1分間に300m走り、1分間に60m泳ぐことができる。どのように進めば最短の時間で助けを求めている人の所へ行けるか。

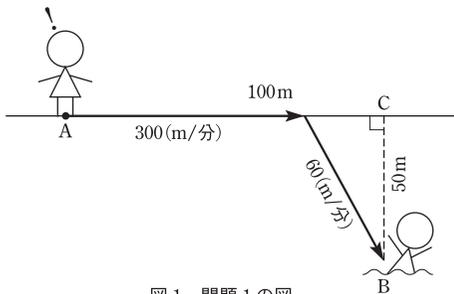


図1 問題1の図

問題1を一般化した問題を考える。

問題2. (問題1の一般化)

直線 ℓ 上に3点 A, D, C があり, $AC=a$ とする。B を $\angle BCD=90^\circ$, $BC=b$ となる点とする。点 P は直線 ℓ 上は速さ p で、それ以外は速さ q で進むとする。点 P が A から ℓ 上を進み、点 D から点 B へ進むとする。最短時間で B に着くときの点 D の位置を求めよ。ただし、 a は十分に大きく、 $p > q$ とする。

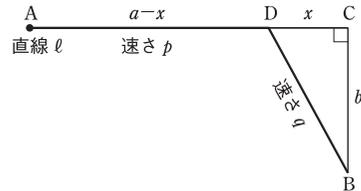


図2 問題2の図

問題2の解答. $CD=x$ ($0 < x < a$) とすると

$$AD=a-x, \quad DB=\sqrt{x^2+b^2}$$

A から D を通って B に着くまでの時間を y とすると

$$y = \frac{AD}{p} + \frac{DB}{q} = \frac{a-x}{p} + \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{q}$$

$$y' = -\frac{1}{p} + \frac{x}{q\sqrt{x^2+b^2}} = \frac{px - q\sqrt{x^2+b^2}}{pq\sqrt{x^2+b^2}}$$

$$= \frac{(p^2-q^2)x^2 - q^2b^2}{pq\sqrt{x^2+b^2}(px + q\sqrt{x^2+b^2})}$$

$y'=0$ とすると、 $(p^2-q^2)x^2 = q^2b^2$ より

$$x = \frac{qb}{\sqrt{p^2-q^2}}$$

このとき、 y は極小かつ最小となる。

よって、D は $CD = \frac{qb}{\sqrt{p^2-q^2}}$ となる点である。■

ここで、D は A の位置によらない。

また、 $\triangle BDC$ において三平方の定理から

$$BD = \sqrt{b^2+x^2} = \sqrt{b^2 + \frac{q^2b^2}{p^2-q^2}} = \frac{pb}{\sqrt{p^2-q^2}}$$

より、 $\triangle BDC$ は、

$$\begin{aligned} BD : DC : CB &= \frac{pb}{\sqrt{p^2-q^2}} : \frac{qb}{\sqrt{p^2-q^2}} : b \\ &= p : q : \sqrt{p^2-q^2} \end{aligned}$$

となる。

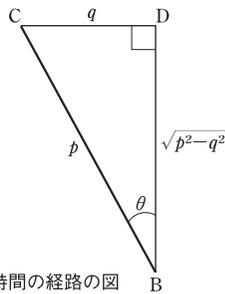


図3 最短時間の経路の図

$\angle DBC = \theta$ とおくと $\sin \theta = \frac{q}{p}$

問題1の解答. 問題2で, $p : q = 5 : 1$, $b = 50$ の場合であるから, $x = \frac{50}{2\sqrt{6}} = \frac{25}{6}\sqrt{6} \doteq 10.2$ より海岸に沿って約90m走ってそれから泳ぐ。 ■

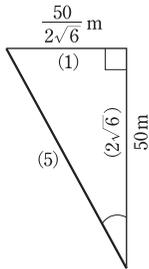


図4 問題1の最短経路

§2. 屈折の法則との関係

問題2の答は次のように解釈できる。

光がある物質から別の物質へ進むとき, それぞれの物質中の光速を p , q , 入射角を α , 屈折角を β とすると, 屈折の法則

$$\frac{\sin \alpha}{p} = \frac{\sin \beta}{q}$$

が成り立つ。問題2の答は, 屈折の法則で, 入射角を $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 屈折角を $\beta = \theta$ として

$\frac{1}{p} = \frac{\sin \theta}{q}$ より $\sin \theta = \frac{q}{p}$ になる場合と解釈できる。

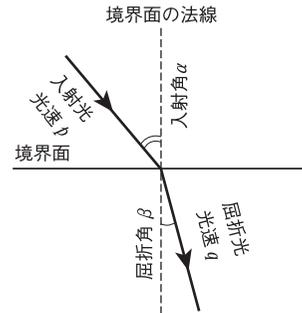
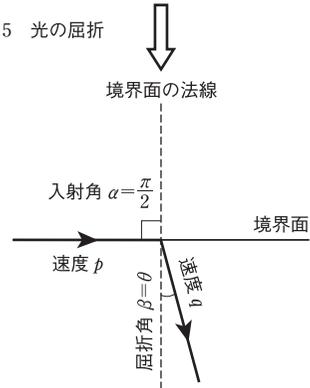


図5 光の屈折



§3. おわりに

光は, 自然には, 図5下のように進まないかもしれない。しかし, 人なら可能である。

今後も数学と物理を含む他教科との関連を考えていきたい。

《参考文献》

- [1] 國友正和, 高等学校理科用教科書 総合物理 2, 数研出版, 2016年発行
- [2] 高木堅志郎・植松恒夫, 高等学校理科用教科書 物理, 啓林館, 2012年発行
(福岡県 久留米工業高等専門学校)