対称的な不等式の証明方法について

柳田（やなぎた）　五夫（いつお）

§1. はじめに

ここでは，対称式の不等式を扱っている。3 次の対称的な多項式の不等式の一部については，柳田〔1〕で扱ったが，ここでは，次数に関係なく多項式の不等式を主に扱うことを考え，証明が難しい不等式の証明に対して有効な，SMV-Theorem を使用する。

SMV-Theorem の補助定理に当たるものがお茶の水女子大で出題されている。

> n 個の実数の組 $S=\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\}$ を考える。$S=S_0$ に対し，「最大元と最小元を，両者の平均でそれぞれ置きかえる」，という操作を施したものを S_1，S_1 に対し同様の操作を行ったものを S_2，以下同様に S_3，S_4，…と n 個の実数の組を決めていく。S_k の各数は，$k\to\infty$ のとき $\dfrac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}$ に収束することを言え。
>
> （1997　お茶の水大・理・後期）

［解答］　$S=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$ について，

$$c=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n},$$

$\beta_j=\alpha_j-c\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とおき，

$T=\{\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n\}$ に対して操作を行い，T_k の各数は $k\to\infty$ のとき $\dfrac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n}$ に収束することを示せばよい。ところで

$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-nc=0$ であるから

$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0$ である $S=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$ について，S_k の各数は，$k\to\infty$ のとき 0 に収束することを示せばよい。このとき，S_k を

$S_k=\{\alpha_{k,1},\ \alpha_{k,2},\ \cdots,\ \alpha_{k,n}\}$，$\alpha_{k,1}\geqq\alpha_{k,2}\geqq\cdots\geqq\alpha_{k,n}$ としても一般性を失わない。

$$S_{k+1}=\{\alpha_{k+1,1},\ \alpha_{k+1,2},\ \cdots,\ \alpha_{k+1,n}\}$$

は

$$S_{k+1}=\left\{\frac{\alpha_{k,1}+\alpha_{k,n}}{2},\ \alpha_{k,2},\ \cdots,\ \alpha_{k,n-1},\ \frac{\alpha_{k,1}+\alpha_{k,n}}{2}\right\}$$

で

$$\begin{aligned}&\alpha_{k+1,1}+\alpha_{k+1,2}+\cdots+\alpha_{k+1,n}\\&=\frac{\alpha_{k,1}+\alpha_{k,n}}{2}+\alpha_{k,2}+\cdots+\alpha_{k,n-1}+\frac{\alpha_{k,1}+\alpha_{k,n}}{2}\\&=\alpha_{k,1}+\alpha_{k,2}+\cdots+\alpha_{k,n}\end{aligned}$$

が成り立つから，$S_i\,(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の要素の和は 0 である。

$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\alpha_{k,1}=0$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\alpha_{k,n}=0$ が示せれば，

$\alpha_{k,1}\geqq\alpha_{k,2}\geqq\cdots\geqq\alpha_{k,n}$ であるから

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_{k,j}=0\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

がいえることになる。したがって，

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_{k,1}=0,\ \lim_{k\to\infty}\alpha_{k,n}=0$$

を示す。

わかりやすいように，S_k の最大数を $M_k\,(=\alpha_{k,1})$，最小数を $m_k\,(=\alpha_{k,n})$ とおくと

$$0=\alpha_{k,1}+\alpha_{k,2}+\cdots+\alpha_{k,n}\geqq nm_k$$

$$0=\alpha_{k,1}+\alpha_{k,2}+\cdots+\alpha_{k,n}\leqq nM_k$$

から

$$m_k\leqq 0\leqq M_k$$

また，操作の定義により

$$\begin{aligned}m_{k+1}&=\min\left(\alpha_{k,n-1},\ \frac{m_k+M_k}{2}\right)\\&\geqq\min\left(\alpha_{k,n},\ \frac{m_k+M_k}{2}\right)\\&=\min\left(m_k,\ \frac{m_k+M_k}{2}\right)\\&=m_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{k+1}&=\max\left(\alpha_{k,2},\ \frac{m_k+M_k}{2}\right)\\&\leqq\max\left(\alpha_{k,1},\ \frac{m_k+M_k}{2}\right)\\&=\max\left(M_k,\ \frac{m_k+M_k}{2}\right)\\&=M_k\end{aligned}$$

であるから

$$m_k \leqq m_{k+1},\ M_{k+1} \leqq M_k$$

が成り立ち，$\{m_k\}$ は非減少列 (広義の増加列)，
$\{M_k\}$ は非増加列 (広義の減少列) となる。
$m_k \leqq 0$ より

$$\frac{m_k+M_k}{2} \leqq \frac{M_k}{2}$$

が成り立つから，S_k から 1 回の操作を行うと最大数の 1 つは $\frac{M_k}{2}$ 以下となる。

S_k の要素の中で $\frac{M_k}{2}$ より大きいものがあるとき，操作 1 回によってその個数は 1 個ずつ減少する。したがって，S_k の要素の中で $\frac{M_k}{2}$ より大きいものが l 個あるとき，S_k について操作を l 回行えば S_{k+l} の要素はすべて $\frac{M_k}{2}$ 以下となるから

$$M_{k+l} \leqq \frac{M_k}{2}$$

が成り立つ。
$l \leqq n$ と $\{M_k\}$ が非増加列であることより
$M_{k+n} \leqq M_{k+l}$ となるから

$$M_{k+n} \leqq \frac{M_k}{2} \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つ。

①で $k=0$ とおくと $M_n \leqq \frac{M_0}{2}$

①で $k=n$ とおくと $M_{2n} \leqq \frac{M_n}{2} \leqq \frac{M_0}{2^2}$

以下帰納的に

$$M_{in} \leqq \frac{M_0}{2^i} \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

が成り立ち，$0 \leqq M_{in}$ であるから

$$0 \leqq M_{in} \leqq \frac{M_0}{2^i} \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$\lim_{i\to\infty} \frac{M_0}{2^i}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{i\to\infty} M_{in}=0$$

$k>0$ のとき，k を n で割ったときの商を i，余りを r とすると

$$k=ni+r,\ 0 \leqq r < n$$

から，$ni \leqq k < (i+1)n$ が成り立ち，$\{M_j\}$ は非増加列であるから

$$M_{in} \geqq M_k \geqq M_{(i+1)n}$$

$k\to\infty$ のとき，$i\to\infty$ で，$\lim_{i\to\infty} M_{in}=0$，
$\lim_{i\to\infty} M_{(i+1)n}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty} M_k=0 \quad すなわち \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_{k,1}=0$$

次に，$\lim_{k\to\infty} \alpha_{k,n}=0$ を示す。

$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0$ である
$S=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$ について
$-\alpha_n-\alpha_{n-1}-\cdots-\alpha_1=0$ であるから
$S'=\{-\alpha_n,\ -\alpha_{n-1},\ \cdots,\ -\alpha_1\}$ を考え，
$S_k=\{\alpha_{k,1},\ \alpha_{k,2},\ \cdots,\ \alpha_{k,n}\}$，
$\alpha_{k,1} \geqq \alpha_{k,2} \geqq \cdots \geqq \alpha_{k,n}$ のかわりに
$S_k'=\{-\alpha_{k,n},\ -\alpha_{k,n-1},\ \cdots,\ -\alpha_{k,1}\}$，
$-\alpha_{k,n} \geqq -\alpha_{k,n-1} \geqq \cdots \geqq -\alpha_{k,1}$ を考えることにより

$$\lim_{k\to\infty} M_k'=\lim_{k\to\infty}(-\alpha_{k,n})=0$$

すなわち

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_{k,n}=0$$

を得る。 ■

§2. SMV-Theorem

$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ を任意の実数列とする。この実数列に対して，次の変換 $\varDelta$ を行う。

1． $a_i=\min(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$，
$a_j=\max(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ を満たす
$i,\ j \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ を選ぶ。

2． a_i と a_j を $\frac{a_i+a_j}{2}$ で置き換える。

最初の数列を $(a_1^1,\ a_2^1,\ \cdots,\ a_n^1)$
$(=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n))$ と表し，変換 $\varDelta$ を行った後の数列を $(a_1^2,\ a_2^2,\ \cdots,\ a_n^2)$ と表すことにする。同様にして，数列 $(a_1^k,\ a_2^k,\ \cdots,\ a_n^k)$ に変換 $\varDelta$ を行った後の数列を $(a_1^{k+1},\ a_2^{k+1},\ \cdots,\ a_n^{k+1})$ と表すことにする。

補助定理 (General mixing variables lemma)

$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ を任意の実数列とする。この実数列に対して，変換 $\varDelta$ を k 回行った数列を $(a_1^{k+1},\ a_2^{k+1},\ \cdots,\ a_n^{k+1})$ とすると，
各 $i\ (1 \leqq i \leqq n)$ に対して

$$\lim_{k\to\infty} a_i^k=a,\ a=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

が成立する。

証明については，お茶の水女子大の問題の解答参照。

定理　Stronger mixing variables-S. M. V. theorem (SMV Theorem)

$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ を任意の実数列とする。この実数列に対して，変換$\varDelta$をk回行った数列を$(a_1^{k+1},\ a_2^{k+1},\ \cdots,\ a_n^{k+1})$とする。

$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ は連続関数で，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ に関する対称式であるとする。このとき

$$f(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \geqq f(a_1^2,\ a_2^2,\ \cdots,\ a_n^2)$$

が成り立ち，$\{f(a_1^k,\ a_2^k,\ \cdots,\ a_n^k)\}$ が $k\to\infty$ のとき収束するならば

$$f(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \geqq f(a,\ a,\ \cdots,\ a),$$
$$a=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

が成立する。

補助定理から $\lim\limits_{k\to\infty} a_i^k = a$ で，仮定から

$$f(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \geqq f(a_1^k,\ a_2^k,\ \cdots,\ a_n^k)$$

が成り立ち，$\{f(a_1^k,\ a_2^k,\ \cdots,\ a_n^k)\}$ が $k\to\infty$ のとき収束することから

$$f(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \geqq f(a,\ a,\ \cdots,\ a)$$

が得られる。

$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ を正の実数列とすると，変換$\varDelta$として相加平均 $\dfrac{a+b}{2}$ のかわりに相乗平均 $\sqrt{ab}$ を使うことができる。これは，$b_i=\log a_i$ として，$(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$ に補助定理を適用すればよい。このとき，$a=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ は $a=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ にかわる。

§3. 練習問題

例題 1　$x_i \geqq 1$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のとき

$$n+(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$
$$\geqq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\left(n+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

(大関〔3〕P. 90 例題 10)

[解答]　一般性を失うことなく

$1\leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ と仮定できる。

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$
$$=n+(x_1+x_2+\cdots+x_n) -\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\left(n+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

とおくと

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) -f(\sqrt{x_1x_n},\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ \sqrt{x_1x_n})$$
$$=x_1+x_n-2\sqrt{x_1x_n} -\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_n}-\frac{2}{\sqrt{x_1x_n}}\right)$$
$$=(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_n})^2-\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\left[\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_n})^2}{x_1x_n}\right]$$
$$=(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_n})^2\left(1-\frac{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}{x_1x_n}\right)$$

$1\leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ より

$x_n \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ が成り立つから

$$x_1x_n \geqq x_n \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

したがって

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)-f(\sqrt{x_1x_n},\ x_2,\ \cdots,\ \sqrt{x_1x_n}) \geqq 0$$

SMV-Theorem より，$G=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ とおくと

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \geqq f(G,\ G,\ \cdots,\ G)$$

が成り立つ。

$$f(G,\ G,\ \cdots,\ G)=n+nG-G\left(n+\frac{n}{G}\right)=0$$

であるから

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \geqq 0$$ ■

例題 1 に関連する問題を大学入試問題から探してみた。

類題 1　次の問いに答えよ。

(1)　$a\geqq 1$，$b \geqq 1$ のとき，次の不等式が成立することを示せ。

$$\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right) \geqq 2\left(ab-\frac{1}{ab}\right)$$

(2)　$a\geqq 1$，$b\geqq 1$，$c \geqq 1$ のとき，次の不等式が成立することを示せ。

$$\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)+\left(b^3-\frac{1}{b^3}\right)+\left(c^3-\frac{1}{c^3}\right)$$
$$\geqq 3\left(abc-\frac{1}{abc}\right)$$

(2007　早稲田大・教育)

類題 1 は次のように一般化できる。

類題 2　$x_1\geqq 1,\ x_2 \geqq 1,\ \cdots,\ x_n \geqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つ。

$$\frac{{x_1}^n+{x_2}^n+\cdots+{x_n}^n}{n}-x_1x_2\cdots x_n$$
$$\geqq \left(\frac{\dfrac{1}{{x_1}^n}+\dfrac{1}{{x_2}^n}+\cdots+\dfrac{1}{{x_n}^n}}{n}-\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}\right)$$

類題 1 (2)から $a \geqq 1$, $b \geqq 1$, $c \geqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc \geqq \left(\frac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}}{3}-\frac{1}{abc}\right)$$

が成り立つが $a \geqq 1$, $b \geqq 1$, $c \geqq 1$ のときには，右辺の条件を厳しくした不等式

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc \geqq \left(\frac{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}}{3}-\frac{1}{abc}\right)abc$$

の証明問題が 2003 年に東京慈恵会医大で出題されている。

この不等式は次のように一般化される。

類題 3 $x_1 \geqq 1$, $x_2 \geqq 1$, $\cdots$, $x_n \geqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つ。

$$\frac{{x_1}^n+{x_2}^n+\cdots+{x_n}^n}{n}-x_1x_2\cdots x_n$$
$$\geqq \left(\frac{\frac{1}{{x_1}^n}+\frac{1}{{x_2}^n}+\cdots+\frac{1}{{x_n}^n}}{n}-\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}\right)x_1x_2\cdots x_n$$

類題 3 の不等式を変形したものが例題 1 である。

例題 2 a, b, c, d は非負の実数で，$a+b+c+d=4$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)+4abcd \geqq 16$$

［**解答**］ 一般性を失うことなく $0 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d$ と仮定できる。

$f(a,\ b,\ c,\ d)=3(a^2+b^2+c^2+d^2)+4abcd-16$ とおくと

$$f(a,\ b,\ c,\ d)-f\left(a,\ \frac{b+d}{2},\ c,\ \frac{b+d}{2}\right)$$
$$=3\left\{b^2+d^2-2\left(\frac{b+d}{2}\right)^2\right\}+4ac\left\{bd-\left(\frac{b+d}{2}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{3(b-d)^2}{2}-ac(b-d)^2$$
$$=(b-d)^2\left(\frac{3}{2}-ac\right)$$

と変形できるから，$\frac{3}{2}-ac>0$ を示す。

$a+c \leqq b+d$, $(a+c)+(b+d)=4$ より $a+c \leqq 2$ が成り立つ。

$$2 \geqq a+c \geqq 2\sqrt{ac} \text{ より } ac \leqq 1<\frac{3}{2}$$

よって $f(a,\ b,\ c,\ d) \geqq f\left(a,\ \frac{b+d}{2},\ c,\ \frac{b+d}{2}\right)$

$f(a,\ b,\ c,\ d)$ は b, c, d に関する対称式であるから，SMV-Theorem より

$$f(a,\ b,\ c,\ d) \geqq f(a,\ t,\ t,\ t),\ t=\frac{b+c+d}{3}$$

が成り立つ。

したがって，$0 \leqq a \leqq 1 \leqq t \leqq \frac{4}{3}$, $a+3t=4$ のとき，$f(a,\ t,\ t,\ t) \geqq 0$ を示せばよい。

$$f(a,\ t,\ t,\ t) \geqq 0$$
$$\iff 3(a^2+3t^2)+4at^3 \geqq 16$$
$$\iff 3(4-3t)^2+9t^2+4(4-3t)t^3 \geqq 16$$
$$\iff -12t^4+16t^3+36t^2-72t+32 \geqq 0$$
$$\iff 4(t-1)^2(t+2)(4-3t) \geqq 0$$

最後の不等式は明らかに成り立つ。 ■

例題 3 (Balkan Mathematical Olympiad 2012)
x, y, z が正の実数のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}+(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}+(z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)} \geqq 4(xy+yz+zx)$$

［**解答**］ $a=\sqrt{y+z}$, $b=\sqrt{z+x}$, $c=\sqrt{x+y}$ とおくと

$$x=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2},\ y=\frac{a^2-b^2+c^2}{2},$$
$$z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

ただし

a, b, $c>0$, $a^2+b^2>c^2$, $b^2+c^2>a^2$, $c^2+a^2>b^2$ が成り立つが，ここでは $a^2+b^2>c^2$, $b^2+c^2>a^2$, $c^2+a^2>b^2$ を除いて，a, b, $c>0$ のとき，不等式が成り立つことを示す。

このとき

$$\sum_{cyclic}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}=abc(a+b+c),$$
$$4(xy+yz+zx)$$
$$=(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)+(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)+(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)$$
$$=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$$

となるから

$$abc(a+b+c) \geqq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$$

すなわち

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geqq 2a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

を示せばよい。

一般性を失うことなく $0<a \leqq b \leqq c$ と仮定できる。

$$f(a,\ b,\ c)=a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)-2a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
&f(a,\ b,\ c)-f(a,\ \sqrt{bc},\ \sqrt{bc})\\
&=b^4+c^4-2b^2c^2+abc(b+c-2\sqrt{bc})-2a^2b^2c^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{bc}\right)\\
&=(b^2-c^2)^2+abc(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-2a^2(b-c)^2\\
&=(b-c)^2\{(b+c)^2-2a^2\}+abc(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\\
&=(b-c)^2\{\underbrace{(b^2-a^2)+(c^2-a^2)}_{\geqq 0}+2bc\}+abc(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

から

$$f(a,\ b,\ c) \geqq f(a,\ \sqrt{bc},\ \sqrt{bc})$$

が成り立つ。

よって，$t=\sqrt{bc}$ とおき，$0<a \leqq t$ のとき，$f(a,\ t,\ t) \geqq 0$ を示せばよい。

$$\begin{aligned}
&f(a,\ t,\ t)\\
&=a^4+2t^4+at^2(a+2t)-2a^2t^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{t^2}\right)\\
&=2at^3-3a^2t^2+a^4\\
&=a(t-a)^2(2t+a) \geqq 0
\end{aligned}$$

■

《参考文献》

〔1〕 柳田五夫，3次の同次対称式 $P(a,\ b,\ c)$ の不等式について，数研通信，No. 80

〔2〕 P. K. Hung：The stronger mixing variables method, Mathematical Reflections 6 (2006)

〔3〕 大関信雄・大関清太：不等式への招待，近代科学社

（元　栃木県立佐野高等学校）