放物線の重心

菱沼（ひしぬま）　洋介（ようすけ）

§1. はじめに

回転体の体積を求める際の裏技として，しばしば登場する「パップス・ギュルダンの定理」というものがある。

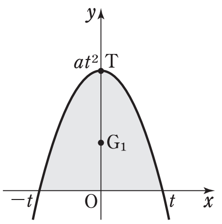
> **パップス・ギュルダンの定理**
> （回転体の体積 V）
> ＝(重心Gの移動距離)×(面積 S)

この定理を用いると，図形の重心と回転軸の距離さえ分かれば，回転体の体積を簡単に求めることができる。逆に言うと，回転体の体積が分かっていれば，回転軸から重心までの距離を求めることができる。

本稿ではまず，パップス・ギュルダンの定理を用いて放物線の重心について考えてみたい。

§2. 放物線の重心

まず，$y=-a(x^2-t^2)$ $(a>0,\ t>0)$ と x 軸で囲まれた部分の重心 G_1 を求める。



これは y 軸に関して対称な図形なので，明らかに，重心は y 軸上にある。つまり，x 軸と重心の距離さえ分かれば，重心の位置が分かる。

では，さっそく求めてみよう。まず，網掛部分の面積 S_1 は

$$S_1=\int_{-t}^{t}\{-a(x^2-t^2)\}dx=\frac{a}{6}(t+t)^3=\frac{4at^3}{3}$$

また，網掛部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V_1 は，

$$\begin{aligned}V_1&=\pi\int_{-t}^{t}\{-a(x^2-t^2)\}^2dx\\&=2\pi a^2\int_0^t(x^4-2t^2x^2+t^4)dx\\&=2\pi a^2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2t^2}{3}x^3+t^4x\right]_0^t\\&=\frac{16\pi a^2t^5}{15}\end{aligned}$$

よって，$G_1(0,\ r_1)$ とすると，パップス・ギュルダンの定理より，

$$V_1=2\pi r_1S_1 \iff \frac{16\pi a^2t^5}{15}=2\pi r_1\frac{4at^3}{3}$$
$$\iff r_1=\frac{2}{5}at^2$$

これより，$G_1\left(0,\ \dfrac{2}{5}at^2\right)$ となる。

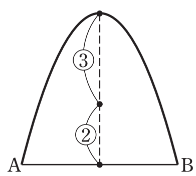
このことから，頂点を $T(0,\ at^2)$ とすると，

$$TG_1:G_1O=\frac{3}{5}at^2:\frac{2}{5}at^2=3:2$$

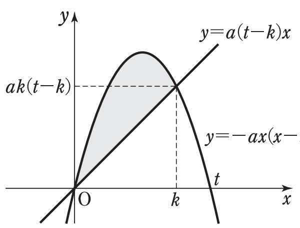
となっていることが分かる。

以上のことから，一般的に次のことが成り立つ。

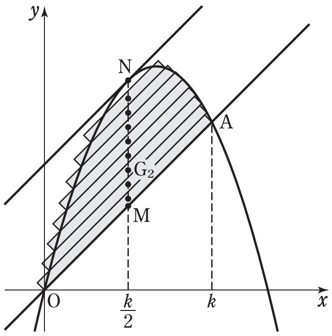
> **放物線の重心①**
> 放物線と放物線の軸に垂直な線分 AB で囲まれた図形の重心は，頂点と線分 AB の中点を 3：2 に内分した位置にある。



次に，$y=-ax(x-t)$ $(a>0,\ t>0)$ と2点 $(0,\ 0)$，$(k,\ ak(t-k))$ を通る直線 $y=a(t-k)x$ で囲まれた部分の重心 G_2 を求める。



この網掛部分を下図のように長方形に分割すると，各長方形の重心を結んだ直線上に重心 G_2 は存在する。よって，線分 OA の中点を M，直線 OA に平行な接線と放物線の接点を N とすると，線分 MN 上に G_2 は存在する。



では，G_2 を求めてみよう。まず，網掛部分の面積 S_2 は

$$S_2=\int_0^k\{-ax(x-t)-a(t-k)x\}\,dx=\frac{ak^3}{6}$$

また，網掛部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V_2 は，

$$\begin{aligned}V_2&=\pi\int_0^k\{-ax(x-t)\}^2dx-\frac{k}{3}\pi\{ak(t-k)\}^2\\&=\pi a^2\int_0^k(x^4-2tx^3+t^2x^2)\,dx\\&\qquad-\frac{k}{3}\pi\{ak(t-k)\}^2\\&=\pi a^2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{t}{2}x^4+\frac{t^2}{3}x^3\right]_0^k-\frac{k}{3}\pi\{ak(t-k)\}^2\\&=\frac{\pi}{30}a^2k^4(5t-4k)\end{aligned}$$

よって，$G_2\left(\frac{k}{2},\ r_2\right)$ とすると，パップス・ギュルダンの定理より，

$$\begin{aligned}&V_2=2\pi r_2S_2\\\iff&\frac{\pi}{30}a^2k^4(5t-4k)=2\pi r_2\frac{ak^3}{6}\\\iff&r_2=\frac{ak}{10}(5t-4k)\end{aligned}$$

これより，$G_2\left(\frac{k}{2},\ \frac{ak}{10}(5t-4k)\right)$ となる。

$M\left(\frac{k}{2},\ \frac{ak}{2}(t-k)\right)$，$N\left(\frac{k}{2},\ \frac{ak}{4}(2t-k)\right)$ より，

$$NG_2=\frac{ak}{4}(2t-k)-\frac{ak}{10}(5t-4k)=\frac{3ak^2}{20}$$

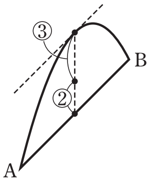
$$G_2M=\frac{ak}{10}(5t-4k)-\frac{ak}{2}(t-k)=\frac{ak^2}{10}$$

よって，

$$NG_2:G_2M=\frac{3ak^2}{20}:\frac{ak^2}{10}=3:2$$

が成り立つ。

以上のことから，一般的に次のことが成り立っていることが分かる。

> **放物線の重心②**
>
> 放物線と放物線の軸に垂直ではない線分 AB で囲まれた図形の重心は，「線分 AB に平行な接線と放物線の接点」と「線分 AB の中点」を 3 : 2 に内分した位置にある。
>
> 
>

つまり，放物線の重心は『3 : 2』の位置にあるというのがポイントとなる。

§3. 斜方回転

放物線の重心の位置が分かると，数Ⅲの積分で出てくる斜方回転体の体積をパップス・ギュルダンの定理を用いることで簡単に求めることができる。

ここでは例題を 2 つ紹介する。

> **例題 1**
>
> 不等式 $x^2-x\leqq y\leqq x$ で表される座標平面上の領域を，直線 $y=x$ の周りに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ。

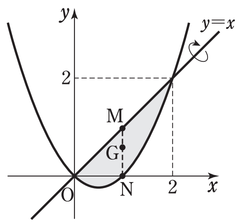
まず，$y=x^2-x$ の接線で傾きが 1 であるものと放物線の接点を N とする。

接点の x 座標を t とすると，$y'=2x-1$ より

$$2t-1=1\iff t=1$$

よって，接点の座標は　N(1, 0)

また，(0, 0)，(2, 2) の中点 M の座標は　M(1, 1)



よって，網掛部分の重心 G の座標は線分 NM を 3 : 2 に内分した位置にあるので　$G\left(1,\ \frac{3}{5}\right)$

点Gと直線 $y=x$ との距離 r は

$$r=\frac{\left|1-\frac{3}{5}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

また，網掛部分の面積 S は

$$S=\int_0^2(x-x^2+x)\,dx=\frac{1}{6}(2-0)^3=\frac{4}{3}$$

ここで，パップス・ギュルダンの定理を用いると，回転体の体積 V は

$$V=2\pi rS=2\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$$

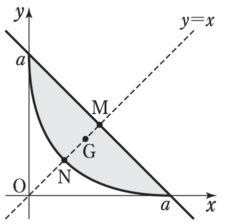
例題 2

a を正の定数とする。xy 座標平面において，曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ と，直線 $x+y=a$ とで囲まれた部分を D とおく。

(1)　D の概形をかき，その面積を求めよ。

(2)　直線 $x+y=a$ を軸として，D を 1 回転させてできる図形の体積を求めよ。

〔08　早稲田大・基幹理工，創造理工，先進理工〕



曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ は，直線 $y=x$ を軸とする放物線の一部となる。

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ と $y=x$ の交点をN，$x+y=a$ と $y=x$ の交点を M とすると，領域 D の重心Gは NM を 3：2 に内分した位置にある。

$\mathrm{N}\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$，$\mathrm{M}\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$ より　$\mathrm{G}\left(\frac{2a}{5},\ \frac{2a}{5}\right)$

Gと直線 $x+y=a$ との距離 r は

$$r=\frac{\left|\frac{2a}{5}+\frac{2a}{5}-a\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}\,a}{10}$$

また，網掛部分の面積 S は，$y=x+a-2\sqrt{ax}$ と $y=-x+a$ で囲まれた部分の面積となるので，

$$S=\int_0^a(-x+a-a-x+2\sqrt{ax})\,dx$$

$$=\left[\frac{4\sqrt{a}}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2\right]_0^a=\frac{a^2}{3}$$

ここで，パップス・ギュルダンの定理を用いると，回転体の体積 V は

$$V=2\pi rS=2\pi\cdot\frac{\sqrt{2}\,a}{10}\cdot\frac{a^2}{3}=\frac{\sqrt{2}}{15}\pi a^3$$

§4. 最後に

放物線の重心の位置が分かると，パップス・ギュルダンの定理を用いることで比較的簡単に回転体の体積を求めることができる。もちろん正式な解答として採用することはできないが，検算に用いるぐらいはできるだろう。また，放物線以外にも，様々な図形の重心をパップス・ギュルダンの定理を用いて求めることができる。回転体の体積を演習する際に，生徒に考えさせても面白いかもしれない。

（東京都　豊島岡女子学園中学校・高等学校）