自然数の逆数の和について
～ゆっくりと正の無限大に発散する実感～

西元（にしもと）　教善（のりよし）

§1. はじめに

自然数 n の逆数 $\dfrac{1}{n}$ の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は極めてゆっくりと正の無限大に発散する。一般に無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ であるが，その逆は偽である。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ であるが $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が発散する例としても $a_n=\dfrac{1}{n}$ はよく引き合いに出されるが，高校生には $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ であることの証明はやや難しく，わかりやすい例として使われる数列には
$b_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ がある。

その理由は $b_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ のとき，中抜け(相殺)現象から和が $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\sqrt{n+1}-1$ であることや分子の有理化から $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ であることが容易にわかり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\infty$ であることが示せるからである。

ここで，数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を比較してみると，

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}\longrightarrow\infty\quad(n\longrightarrow\infty)$$

であることから，$\{a_n\}$ の方が $\{b_n\}$ よりも格段に速く 0 に収束する。つまり，同じ正の無限大に発散するが $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の方が $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ よりも格段にゆっくりと正の無限大に発散することがわかる。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\sqrt{n+1}-1$ であることから N を自然数として，$n\geqq10^{2N}-1$ ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k\geqq10^N$ である。

よって，$n\geqq10^{2N}$ ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k>10^N$ である。

また，$b_n<\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\leqq\dfrac{1}{2\cdot10^N}$ である。

これより，$N=2$ のとき「$n\geqq10000\Longrightarrow\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k>100$，$(0<)\ b_n<\dfrac{1}{200}$」である。

では，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k>100$ となるのは，n がどのくらいの大きさの自然数のときなのであろうか。

本稿では，このことを中心にして考察する。

§2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{[e^n]}\frac{1}{k}>n$ であること

数学Ⅲの「積分法の応用」の中の「定積分を用いた不等式の証明」で次のような不等式を扱う。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1)\qquad\cdots\cdots(*)$$

すると，$(*)$ から即座にわかることであるが，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\log(n+1)\longrightarrow\infty\quad(n\longrightarrow\infty)$$

より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ である。

ここで，n を自然数とすると，$(*)$ より，
$N=[e^n]$（[　] はガウス記号）とおくと

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{N}>\log(N+1)$$

であるから，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{[e^n]}>\log([e^n]+1)\cdots\cdots①$$

である。

一般に，x を実数として，$[x]\leqq x<[x]+1$ であるから，$[e^n]\leqq e^n<[e^n]+1$ である。
よって，$[e^n]+1>e^n>0$ であることから，
$\log([e^n]+1)>\log e^n=n$ ……② である。

したがって，①，②より，

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{[e^n]}>n$ である。

つまり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{[e^n]}\frac{1}{k}>n$ である。■

§3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10^n-1}\frac{1}{k}>2.3n$（$n$は自然数）について

⑴ $\displaystyle\sum_{k=1}^{10^n-1}\frac{1}{k}>2.3n$（$n$は自然数）であること

§2. で証明した不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{[e^n]}\frac{1}{k}>n$ においては $[e^n]$ が具体的に掴みにくい。そこで（＊）において，$n=10^m-1$（m は自然数）とおくと，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{10^m-1}>\log 10^m \quad \cdots\cdots③$$

となる。

ここで，$\log 10=2.302\cdots>2.3$ を用いると

$$\log 10^m=m\log 10=m\cdot 2.302\cdots>2.3m \quad \cdots\cdots④$$

であるから，③，④より

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{10^m-1}>2.3m \quad \cdots\cdots⑤$$

を得る。つまり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10^n-1}\frac{1}{k}>2.3n$（$n$ は自然数）■

⑵ 1から $\dfrac{1}{9999999999}$ までの和＞23

～100億個足しても23と少し～

⑤において，$m=10$ とすると，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{10^{10}-1}>2.3\cdot 10$$

つまり，$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{9999999999}>23$ である。

これより，1から幾つまでの自然数の逆数を足せば23を超すか（初めて，23を超すとは言っていない）と言えば，1から9,999,999,999（99億9999万9999）までの自然数の逆数を足せばよいことがわかる。裏を返せば，100億個足してもわずか23と少しということである。

⑶ 和が100を超えるためには何個必要か

100億個足してもわずか23と少しということであるが，では一体何個足せば100を超えるのであろうか。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$ の場合は $n=10000$ でよかったが……。$N=10^n-1$ のとき，

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{N}>100$ であるためには，

$2.3n>100 \Longleftrightarrow n>43.4\cdots \Longleftrightarrow n\geqq 44$ より

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{10^{44}-1}>100$ である。

$10^{11}=100000000000$（1000億）であるから，$10^{44}=$ 1000億の4乗 である。つまり，

1から $\underbrace{1000000000\cdots\cdots0000000000}_{44\text{個}}$ までの自然数の逆数の和でもようやく100を超える程度なのである。自然数の逆数の和がいかにのんびりと微増しているかが実感できるであろう。

なお，nが十分大きいときは，オイラーの定数 $\gamma=0.5772\cdots$ を用いて，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{10^n-1}\fallingdotseq 2.3n+\gamma$$

と表せる。

もちろん，$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}\fallingdotseq\log n+\gamma$ である。

§4. まとめ

1からnまでの自然数の和は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ である。1からnまでの自然数の逆数の和を $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}k}=\frac{2}{n(n+1)}$ であるとしてしまう生徒も多い。これが誤りであるのは歴然である。左辺はnが増加すればそれに伴って増加するが，右辺は減少してしまうからである。

では，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ はどのようなnの関数になるのか，また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ の収束・発散についてとか，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ が与えられた数値よりも大きくなるにはnをいくらにすればよいのかとかについて興味をもつ生徒が出て来るだろう。

数学Ⅲまで学習すれば，すべての自然数nに対して $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}>\log(n+1)$ であるという不等式を知ることになる。

これを題材にして，再度，数列の和や級数について考察させれば学習効果が上がると思う。本考察は，その一例である。進んだ生徒には考えさせてみたいものである。

（山口県立高森高等学校）