数学的帰納法とベルヌーイの不等式

大谷(おおたに)　昌範(まさのり)

§1. はじめに

ロシア発の教科書『やわらかな思考を育てる数学問題集』(全 3 巻〔1〕) には，日本の高校の数学教育を考える上で，参考になることが多い。

数学的帰納法による不等式の証明法 (〔1〕　第 16 章参照) は，一般によく知られるのとは違うアプローチによる証明が紹介されていて，興味深く読んだ。あまり広くは知られていないと思うので，ベルヌーイの不等式を例に，ここに紹介させていただきたい。

§2. ベルヌーイの不等式

ベルヌーイの不等式とは次の不等式のことである (〔1〕)。

> $x \geqq -1$ で n が自然数のとき
> $(1+x)^n \geqq 1+nx$　　　(☆)

この不等式は現在，数学 B (〔2〕) においても，標準的な問題として載せられている。ただし，教育的配慮から条件は「$x>0$」となっている。この不等式は，教科書〔2〕にもあるように，次のような数学的帰納法によって示される。

(証明)

(Ⅰ)　$n=1$ のとき，(左辺)$=1+x$，(右辺)$=1+x$ より (☆) は正しい。

(Ⅱ)　$n=k$ のとき，不等式 (☆) が正しいと仮定する。

このとき，$1+x \geqq 0$ に注意して

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{k+1} &= (1+x)\cdot(1+x)^k \\
&\geqq (1+x)\cdot(1+kx) = 1+(k+1)x+kx^2 \\
&> 1+(k+1)x
\end{aligned}
$$

より，$n=k+1$ のときも，(☆) は正しい。

以上より，すべての自然数 n に対して，不等式 (☆) は正しい。　　**(証明終わり)**

§3. 別のアプローチによる数学的帰納法

さて今回紹介したいのは，次のアプローチによる数学的帰納法である (〔1〕)。

> $a_n=(1+x)^n$，$b_n=1+nx$ に対して
> (Ⅰ)　$a_1 \geqq b_1$ を示す
> (Ⅱ)　どのような $k \leqq n$ に対しても，
> $a_k-a_{k-1} \geqq b_k-b_{k-1}$ を示す

この (Ⅰ)，(Ⅱ) を示せば，$a_1 \geqq b_1$

$$
\begin{gathered}
a_2-a_1 \geqq b_2-b_1 \\
a_3-a_2 \geqq b_3-b_2 \\
\cdots\cdots\cdots \\
a_n-a_{n-1} \geqq b_n-b_{n-1}
\end{gathered}
$$

の辺々を足し合わせて，n が任意であることから，すべての自然数 n に対して，不等式 $a_n \geqq b_n$ が成り立つという訳である。

§4. ベルヌーイの不等式の別証明

上のアプローチで，ベルヌーイの不等式を示してみたい。この証明法だと，条件 $x \geqq -1$ が更に緩められて，$x \geqq -2$ でも構わないことに気付かされる。その意味でも興味深い証明法と言える。

(証明)　(Ⅰ) は明らか。

(Ⅱ)　$2 \leqq k \leqq n$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&a_k-a_{k-1}-b_k+b_{k-1} \\
&=(1+x)^k-(1+x)^{k-1}-(1+kx)+\{1+(k-1)x\} \\
&=(1+x)^{k-1}(1+x-1)-x=(1+x)^{k-1}\cdot x-x \\
&=x\{(1+x)^{k-1}-1\}
\end{aligned}
$$

ここで，$x>0$ のときは自明であるから，$x \leqq 0$ について考えてみる。$-2 \leqq x \leqq 0$ のとき，

$-1 \leqq 1+x \leqq 1$，つまり $|1+x| \leqq 1$ より

$(1+x)^{n-1}-1 \leqq 0$

ゆえに　$a_k-a_{k-1}-b_k+b_{k-1} \geqq 0$

$a_k-a_{k-1} \geqq b_k-b_{k-1}$

以上より，すべての自然数nに対して，不等式(☆)が成り立つ。　**(証明終わり)**

§5. 補足

なお，$n^n \geqq (n+1)^{n-1}$ といった不等式を数学的帰納法で示す場合には，次の方針にしたがって示すとよい(〔1〕)。

$a_n = n^n$, $b_n = (n+1)^{n-1}$ に対して
(Ⅰ)　$a_1 \geqq b_1$ を示す
(Ⅱ)　どのような $k \leqq n$ に対しても，
$\dfrac{a_k}{a_{k-1}} \geqq \dfrac{b_k}{b_{k-1}}$ を示す

ここで紹介した方法は決して難しいものではなく，高校生でも十分理解できるものだと思う。問題によっては，式変形の面で平易になる場合もある。授業において，数学的帰納法を指導する上で，教科書の内容を補うのにふさわしい話題と考えている。

《参考文献》

〔1〕　やわらかな思考を育てる数学問題集 1，2，3
ドミトリ・フォミーン，セルゲイ・ゲンキン，イリヤ・イテンベルク　著
志賀浩二・田中紀子　訳（岩波書店）
〔2〕　数学Ｂ　(数研出版)

(神奈川県　湘南工科大学附属高等学校)