一を聞いて二十一を知る

内藤（ないとう）　康正（やすまさ）

§1. はじめに

虫食い算に似たパズルに覆面算があります。文字の部分に数字を当てはめて計算が合うようにするパズルです。元の数字を正体とすれば文字が覆面ということでしょうか。

一般的には右のような“ワード覆面算”が多いのですが，2017年にちなんだ“年賀覆面算”を自作しました（問題１と２）。

```
   SEND
+) MORE
  MONEY
```

この種のパズルは勉強の息抜きとして楽しめますが，いざやってみると一の位の数字の意外な威力を味わえます。数学Aの「整数の性質」はやさしいようで難しく，苦手とする生徒も多いなか，知らず知らずに整数問題に親しめる効果も期待できると思い，ここに紹介させていただきます。

覆面算のルールはシンプルで，同じ文字には同じ数字，異なる文字には異なる数字を当てはめます。また，最高位の文字は０ではないものとします。

§2. 掛け算九九の表の６の段

問題１

```
    BIRD  …①
×)     6  …②
   RBRIB  …③
```

※ただし，B，I，R，Dは６と異なる数字とする。

分かっている数字は６だけですが，この６をどう活かすかが鍵となります。掛け算九九の表を眺めていると，偶数に６を掛けても一の位は不変であることに気づきます。

$\underline{2}\times6=1\underline{2}$　　$\underline{4}\times6=2\underline{4}$

$\underline{6}\times6=3\underline{6}$　　$\underline{8}\times6=4\underline{8}$

ということは③の一の位Bについて，Dが偶数だと B=D となってしまいます。すなわちDは奇数と分かります。また，D=1 だと B=6 で不適，D=5 では B=0 となり，①の最高位が０でやはり不適です。

したがって，Dは一気に D=3，7，9 に絞ることができます。

(i)　D=3 のとき

③の一の位が B=8

次に③の万の位が R=4，5

調べてみると，いずれの場合も適するＩがありません。

```
    8I43          8I53
×)     6      ×)     6
   484I8         585I8
```

(ii)　D=7 のとき

③の一の位が B=2

次に③の万の位が R=1

このとき直ちに，次の解が得られます。

```
    2017
×)     6
   12102
```

(iii)　D=9 のとき

B=4，R=2 で，適するＩがありません。

こうして，問題１は

$2017\times6=12102$

が唯一の解になります。

§3. 一の位が１になる積は？

問題２

```
     ABC  …①
×)   DEF  …②
    DGBE  …③
    ABC   …④
  EGAB    …⑤
  DHECEE  …⑥
```

今度は，分かっている数字は１つもありませんが，④=① に注目すると E=1 がすぐに分かります。

$$
\begin{array}{rl}
 \text{ABC} & \cdots① \\
\times)\quad \text{D1F} & \cdots② \\
\hline
\text{DGB1} & \cdots③ \\
\text{ABC} & \cdots④ \\
\text{1GAB} & \cdots⑤ \\
\hline
\text{DH1C11} & \cdots⑥
\end{array}
$$

次に，E≠D であることから⑥の最高位のDは，(繰り上がって) D=2 のはずです。

$$
\begin{array}{rl}
 \text{ABC} & \cdots① \\
\times)\quad \text{21F} & \cdots② \\
\hline
\text{2GB1} & \cdots③ \\
\text{ABC} & \cdots④ \\
\text{1GAB} & \cdots⑤ \\
\hline
\text{2H1C11} & \cdots⑥
\end{array}
$$

ここで，F×ABC=2GB1 の掛け算に注目します。一の位の数字が 1 になる九九は，意外にも

$1\times1=1$　　　　$3\times7=21$

$7\times3=21$　　　　$9\times9=81$

だけです。C，F が異なることから C×F は

$3\times7=21$　か　$7\times3=21$

しかありません。ここで

⑤は　2×ABC=1GAB

③は　F×ABC=2GB1

ですから F≠7 は明らかで (C，F)=(3，7) が決定です。あとは芋づる式に数字が決まり，問題 2 は

947×213=2017 年 1 月 1 日

が唯一の解となります。一の位の 1 を聞いて 3×7=21 を知ったことが解決の鍵でした。

§4. 一の位の観察

ここで覆面算から離れて，次の問題を考えてみます。

問題 3

> 自然数 n に対して，n^5 と n の一の位は一致することを示せ。

この事実は，表を作って素朴に調べてみると上で用いた一の位の性質と結びついていることがわかります。

まず一の位が 2，4，6，8 の n について n^4 の一の位を調べると，次の表のようにすべて 6 となります。したがって n^5 の一の位は $6\times n$ の一の位に一致しますが，それは§1. で見たように n の一の位に一致します。

n の一の位	2	4	6	8
n^2 の一の位	4	6	6	4
n^4 の一の位	6	6	6	6

次に一の位が 1，3，7，9 の n について n^4 の一の位を調べると，今度はすべて 1 になります。これは§2. で見た一の位が 1 になる積の組合せが関わっています。そして n^5 の一の位は $1\times n=n$ の一の位に一致します。

n の一の位	1	3	7	9
n^2 の一の位	1	9	9	1
n^4 の一の位	1	1	1	1

$n=0,\ 5$ については何乗しても一の位は n ですから，これで問題 3 が解決しました。

整数の性質の学習内容で考えると，n^5-n が次のような変形によって 10 の倍数であることから示すこともできます。

$$
\begin{aligned}
n^5-n &= n(n^2-1)(n^2+1) \\
&= (n-1)n(n+1)\{(n-2)(n+2)+5\} \\
&= \underline{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)} \\
&\qquad +5(n-1)n(n+1)
\end{aligned}
$$

（下線部は 5 つの連続する整数の積で 5 の倍数）

また，発展的な学習としては，フェルマーの定理から

$n^5\equiv n \pmod 5$

一方，n^5 と n の偶奇は一致するので

$n^5\equiv n \pmod 2$

ここで，5 と 2 が互いに素であることから

$n^5\equiv n \pmod{10}$

このように，ほとんど苦労することなく導くこともできます。

しかし，はじめからこうしたうまい方法で楽をするというプロセスが，生徒にとって本当の成長に結びつくのかは少し疑問です。まずは確実な方針を大事にして一歩一歩自分の手で調べてみる。そうした地道な作業のあとに学ぶ巧みな解法や先人の智慧こそが血肉になるのだと思います。

とはいえ，限られた 3 年間で次々と成果を求められる高校時代にはじっくりと時間がとれないという悩みもあります。そこで，覆面算や虫食い算を，日ごろの試行錯誤不足を補ってくれるサプリメント教材と位置づけることはできないでしょうか。これといった“決まったやり方”もないので，問題解決の糸口から探さねばなりませんが，そのことがかえっ

て本来備わっている「自分で考えてみたい」という本能をくすぐるようで，生徒たちに出題すると思いのほか熱中して取り組んでくれます。

§5. 結びにかえて

問題4はすこし古い問題ですが，まずは素朴な方針を大事にしてほしいという出題者のメッセージを感じる1題です。折を見て虫食い算や覆面算と一緒に生徒に出題することにしています。

問題4

> m，n は自然数で，$m<n$ を満たすものとする。m^n+1，n^m+1 がともに10の倍数となる m，n を1組与えよ。〔1996　京都大学〕

m^n も n^m も一の位が9となるような m，n を探すだけです。一の位が9になる掛け算九九は

1×9，9×1，3×3　と　7×7

しかありませんから，$m=9$，$n=19$ などが試行錯誤によって見つかる問題です。(もちろん解答にはどのようにして発見したかを記述することになりますが)

一の位が3や7の解の存在の有無に興味を示す生徒も少なくありません。こちらの方も，一の位に着目して考え，分かったことをどのように答えにまとめればよいかという，思考力・表現力の練習にとても適した課題となります。

(東京都立立川高等学校)