点と直線の距離の公式の証明

森島(もりしま)　充(みつる)

§1. 点と直線の距離の公式

> 点 P(x_1, y_1) から，直線 ℓ：$ax+by+c=0$ に下ろした垂線の足をQとすると
> $$\mathrm{PQ}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

この公式の証明には様々なものがありますが，内積を使った証明がとても美しくて私は好きです。でも残念ながら，多くの生徒にとっては分かった気がしないようです。

今回，証明を空間の中で考えることで，とてもシンプルに，しかもほとんど計算をせずに導くことが出来ました。空間ベクトルを学んだ後にトピックとして教えると面白いかもしれません。

§2. 証明

PQ$=0$ のときは明らかなので，PQ$\neq 0$ とします。

xyz 空間で，点Pを改めて (x_1, y_1, 0) とおいて，$z=ax+by+c$ ……① と定めると，図1のように，①は xyz 空間の平面を表し，直線 ℓ は平面①と xy 平面の交線になります。

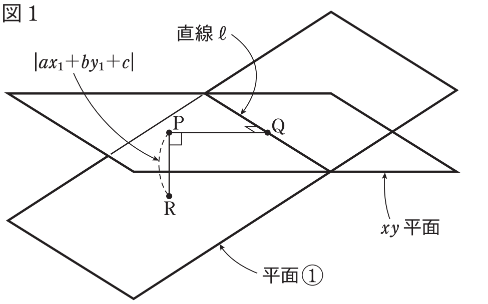
ℓ は直線ですから，a と b は同時に0にはならないので，平面①と xy 平面は平行ではありません。

また，点Rを (x_1, y_1, ax_1+by_1+c) とおくと，点Rは平面①上の点で，PR⊥(xy 平面) ですから，

$$\mathrm{PR}=|ax_1+by_1+c|$$

となります。

図1



次の図2は，図1を平面 PQR で切ったものです。平面 PQR は直線 ℓ に垂直です。

平面①の法線ベクトル $\vec{n}$ を，

$$\vec{n}=(a,\ b,\ -1)$$

とし，点L，M，N を，

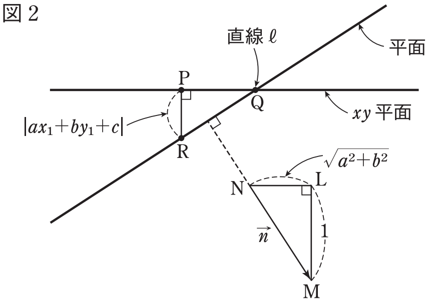
$$\overrightarrow{\mathrm{NM}}=\vec{n}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{NL}}=(a,\ b,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=(0,\ 0,\ -1)$$

を満たす点とします。直線 ℓ の方向ベクトル $\vec{d}$ を，

$$\vec{d}=(b,\ -a,\ 0)$$

とすると，$\overrightarrow{\mathrm{NM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{NL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{LM}}$ はすべて $\vec{d}$ に垂直ですから，点L，M，N を平面 PQR 上の点として定めることが出来ます。

図2



このとき，

$$\triangle\mathrm{PQR}\backsim\triangle\mathrm{LMN}$$

ですから，

$$\mathrm{PQ}:\mathrm{PR}=\mathrm{LM}:\mathrm{LN}$$
$$\mathrm{PQ}:|ax_1+by_1+c|=1:\sqrt{a^2+b^2}$$

となります。よって

$$\mathrm{PQ}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

であることが示せました。

（東京都立調布南高等学校）