平面ベクトルの４つの問題が一気に解決する定理

十河　悟（そがわ　さとる）

§1. はじめに

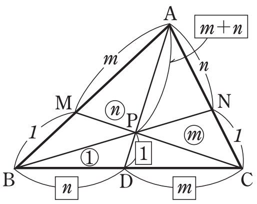
三角形の内部にある点の位置ベクトルを求める問題や，その点と各頂点を結んでできる３つの三角形の面積比を求める問題など，面倒な計算に生徒たちは苦労していますが，これらを一気に解決する定理を紹介します。

この定理を「十河の定理」として授業で教えると，多くの生徒が拍手喝采し，面倒な計算から解放されると，ほっとした表情を見せてくれます。

§2. 定理

定理

△ABC において，辺 AB を $m:1$ に内分する点を M とし，辺 AC を $n:1$ に内分する点を N とする。線分 BN と線分 CM の交点を P とし，直線 AP と辺 BC の交点を D とする。



このとき，次の(1)～(4)が成り立つ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{m}{m+n+1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{n}{m+n+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=n:m$

(3)　$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=(m+n):1$

(4)　$\triangle\mathrm{PAB}:\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}=n:1:m$

［証明］　$\mathrm{BP}:\mathrm{PN}=s:(1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AN}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{ns}{n+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\mathrm{CP}:\mathrm{PM}=t:(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AM}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{mt}{m+1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ だから

$$\begin{cases}1-s=\dfrac{mt}{m+1}\\[2mm] \dfrac{ns}{n+1}=1-t\end{cases}$$

これを s，t について解くと

$$\begin{cases}s=\dfrac{n+1}{m+n+1}\\[2mm] t=\dfrac{m+1}{m+n+1}\end{cases}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{m}{m+n+1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{n}{m+n+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ……(1)

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{m+n}{m+n+1}\times\dfrac{m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{n+m}$ だから，点Aに関する位置ベクトルを考えると，ベクトル $\dfrac{m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{n+m}$ は辺 BC を $n:m$ に内分する点の位置ベクトルであり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ に平行だから

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{n+m}$ となる。

よって　$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=n:m$ ……(2)

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{m+n}{m+n+1}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ なので，

$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=(m+n):1$ ……(3) となる。

さらに，$\triangle\mathrm{ABC}=S$ とすると，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=n:m$ より　$\triangle\mathrm{ABD}=\dfrac{n}{m+n}S$，$\triangle\mathrm{ADC}=\dfrac{m}{m+n}S$

$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=(m+n):1$ より

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{m+n}{m+n+1}\triangle\mathrm{ABD}=\frac{m+n}{m+n+1}\times\frac{n}{m+n}S=\frac{n}{m+n+1}S$$

$$\triangle\mathrm{PCA}=\frac{m+n}{m+n+1}\triangle\mathrm{ADC}=\frac{m+n}{m+n+1}\times\frac{m}{m+n}S=\frac{m}{m+n+1}S$$

また，$\triangle \mathrm{PBC}=\dfrac{1}{m+n+1}\triangle \mathrm{ABC}=\dfrac{1}{m+n+1}S$

したがって，

$\triangle \mathrm{PAB}:\triangle \mathrm{PBC}:\triangle \mathrm{PCA}$

$=\dfrac{n}{m+n+1}S:\dfrac{1}{m+n+1}S:\dfrac{m}{m+n+1}S$

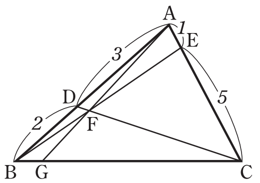
$=n:1:m$ …… (4)

［解説］ AM：MB および AN：NC において，MB と NC の部分の比を 1 にするところがポイントです。こうすることによって，定理として覚えやすい形になります。

§3. 応用例題

【例題 1】

△ABC において，辺 AB を 3：2 に内分する点を D，辺 AC を 1：5 に内分する点を E とする。線分 BE と線分 CD の交点を F とし，直線 AF と辺 BC の交点を G とする。$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくとき，次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) AF：FG を求めよ。

［10 名城大 (3)追加］

【解】 (1) $\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=3:2=\dfrac{3}{2}:1$

$\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=1:5=\dfrac{1}{5}:1$

$\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{5}+1=\dfrac{27}{10}$ だから，定理より

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{27}{10}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\frac{1}{5}}{\frac{27}{10}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{5}{9}\vec{b}+\frac{2}{27}\vec{c}$$

(2) 定理より点 G は辺 BC を $\dfrac{1}{5}:\dfrac{3}{2}=2:15$ に内分する点だから $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{15}{17}\vec{b}+\dfrac{2}{17}\vec{c}$

(3) 定理より

$$\mathrm{AF}:\mathrm{FG}=\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right):1=\frac{17}{10}:1=17:10$$

【例題 2】 △ABC とその内部にある点 P が，$7\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たしている。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。また，△PAB，△PBC，△PCA の面積の比を求めよ。

［14 関西大・改］

【解】 条件より

$-7\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$ だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{12}=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

直線 CP と辺 AB の交点を M，直線 BP と辺 AC の交点を N とし，$\mathrm{AM}:\mathrm{MB}=m:1$，$\mathrm{AN}:\mathrm{NC}=n:1$ とすると，定理より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{m+n+1}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ だから

$$\begin{cases} m+n+1=12k \\ m=2k \\ n=3k \end{cases}$$

よって $k=\dfrac{1}{7}$，$m=\dfrac{2}{7}$，$n=\dfrac{3}{7}$

したがって，定理より

$\triangle \mathrm{PAB}:\triangle \mathrm{PBC}:\triangle \mathrm{PCA}=n:1:m$

$=\dfrac{3}{7}:1:\dfrac{2}{7}=3:7:2$

【例題 3】 △ABC とその内部の点 P があり，△PAB，△PBC，△PCA の面積比を 3：1：2 とする。点 A，B，C の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とするとき，点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

［東北福祉大］

【解】 直線 CP と辺 AB の交点を M，直線 BP と辺 AC の交点を N とし，$\mathrm{AM}:\mathrm{MB}=m:1$，$\mathrm{AN}:\mathrm{NC}=n:1$ とすると，定理より

$\triangle \mathrm{PAB}:\triangle \mathrm{PBC}:\triangle \mathrm{PCA}=n:1:m$ だから

$\mathrm{AM}:\mathrm{MB}=2:1$，$\mathrm{AN}:\mathrm{NC}=3:1$

このとき，定理より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

したがって $\vec{p}-\vec{a}=\dfrac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})+\dfrac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})$

ゆえに

$$\vec{p}=\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

【例題4】 t を正の実数とする。三角形OABの辺OAを2：1に内分する点をM，辺OBを t：1に内分する点をNとする。線分ANと線分BMの交点をPとする。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ および t を用いて表せ。

(2) 直線OPは線分BMと直交し，かつ∠AOBの二等分線であるとする。このとき，辺OAと辺OBの長さの比と t の値を求めよ。 ［14 東北大］

【解】 (1) $2+t+1=t+3$ だから定理より，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{t+3}\overrightarrow{OA}+\frac{t}{t+3}\overrightarrow{OB}$$

(2) 直線OPと辺ABの交点をQとすれば，

定理より AQ：QB$=t$：2

直線OQは∠AOBの二等分線だから

AQ：QB＝OA：OB$=t$：2

直線OPは線分BMと直交し，かつ∠MOBの二等分線だから点Pは線分BMの中点である。

したがって $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OB}}{2}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\not\parallel\overrightarrow{OB}$ だから $\begin{cases}\dfrac{2}{t+3}=\dfrac{1}{3}\\[2mm]\dfrac{t}{t+3}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

よって $t=3$

以上から OA：OB＝3：2，$t=3$

【例題5】 △OABがあって，OA＝6，OB＝4，AB＝8 である。△OABの内心をIとすると，$\overrightarrow{OI}=\boxed{}\overrightarrow{OA}+\boxed{}\overrightarrow{OB}$ である。 ［東京理科大・改］

【解】 直線BIと辺OAの交点をM，直線AIと辺OBの交点をNとする。

線分BMは∠ABOの二等分線だから

OM：MA＝4：8$=\dfrac{1}{2}$：1

線分ANは∠OABの二等分線だから

ON：NB＝6：8$=\dfrac{3}{4}$：1

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}+1=\dfrac{9}{4}$ だから，定理より

$$\overrightarrow{OI}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}}\overrightarrow{OA}+\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

§4. おわりに

数研通信No.86に岐阜県立長良高等学校の臼井先生が類似の定理を発表しておられましたが，私は以前から比の値が同じところを1に固定したものを使っています。これにより交点の位置ベクトルだけでなく，面積比なども覚え易い形になります。

この定理により，ベクトルの一次独立性を使った面倒な計算から解放され，問題によっては暗算でも解答が得られる優れた定理だと自負していますが，マークシート形式のテストでは問題ないものの，記述試験においては，周知の定理ではないために減点されてしまうのではないかと心配しています。

（山口県 野田学園高等学校）