整数問題におけるちょっとした工夫について

柳田(やなぎた)　五夫(いつお)

§1. はじめに

解くことが難しい問題が整数問題には多いが，参考文献〔1〕にある整数問題に対してちょっとした工夫を2つ述べてみたい。

§2. 1つ目の工夫

(1) 整数を係数とする n 次方程式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ が有理数の解 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ (α と β は互いに素な整数とする)をもつとき，α は a_0 の約数であり β は a_n の約数であることを示せ。

(2) 素数 p に対して，$x+y+z=\dfrac{p}{3}$，$xy+yz+zx=\dfrac{1}{p}$，$xyz=\dfrac{1}{p^3}$ を満たす x，y，z がすべて正の有理数であるとき，p および x，y，z を求めよ。　(2010 旭川医大)

[解答] (1) $f\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)=0$ だから

$$a_0\beta^n+a_1\alpha\beta^{n-1}+a_2\alpha^2\beta^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta+a_n\alpha^n=0 \quad\cdots\cdots①$$

①を変形すると

$$a_0\beta^n=-\alpha(a_1\beta^{n-1}+a_2\alpha\beta^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-2}\beta+a_n\alpha^{n-1})$$

$$\frac{a_0\beta^n}{\alpha}=-(a_1\beta^{n-1}+a_2\alpha\beta^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-2}\beta+a_n\alpha^{n-1})$$

上の式で，右辺は整数だから左辺も整数である。仮定から α と β は互いに素な整数なので，α は a_0 の約数である。

同様にして①を変形すると

$$\frac{a_n\alpha^n}{\beta}=-(a_0\beta^{n-1}+a_1\alpha\beta^{n-2}+a_2\alpha^2\beta^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1})$$

上の式で，右辺は整数だから左辺も整数である。仮定から α と β は互いに素な整数なので，β は a_n の約数である。

(2) x，y，z を解とする3次方程式は

$$t^3-\frac{p}{3}t^2+\frac{1}{p}t-\frac{1}{p^3}=0$$

すなわち

$$3p^3t^3-p^4t^2+3p^2t-3=0 \quad\cdots\cdots②$$

ここで，$\boldsymbol{pt=s}$ とおくと方程式②は

$$3s^3-p^2s^2+3ps-3=0 \quad\cdots\cdots③$$

となり，②の解はすべて正の有理数解だから，③の解もすべて正の有理数解である。③は整数を係数とする3次方程式だから，(1)より正の有理数解は

$$1,\ 3,\ \frac{1}{3}$$

の可能性しかない。

(i) 1が解のとき

$$3-p^2+3p-3=0$$

すなわち　$p^2-3p=0$

p は素数だから　$p=3$

このとき，方程式③は

$$3s^3-9s^2+9s-3=0$$

$$3(s-1)^3=0$$

$s=1$ から $t=\dfrac{1}{3}$ で $x=y=z=\dfrac{1}{3}$

(ii) 3が解のとき

$$81-9p^2+9p-3=0$$

すなわち　$3(p^2-p)=26$

26は3の倍数ではないから，これを満たす整数 p は存在しない。

(iii) $\dfrac{1}{3}$ が解のとき

$$\frac{1}{9}-\frac{p^2}{9}+p-3=0$$

すなわち　$p^2-9p+26=0$

$D=9^2-4\cdot 26<0$ より解は虚数となり，
これを満たす整数 p は存在しない。

(i)〜(iii)から $p=3$，$x=y=z=\dfrac{1}{3}$ ■

(2)で②の正の有理数解の候補は

$1,\ 3,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{p},\ \dfrac{3}{p},\ \dfrac{1}{p^2},\ \dfrac{3}{p^2},\ \dfrac{1}{p^3},\ \dfrac{3}{p^3},\ \dfrac{1}{3p},\ \dfrac{1}{3p^2},\ \dfrac{1}{3p^3}$

となり，調べるのは時間がかかる。

§3. 2つ目の工夫

次の工夫は，以下の補題を用いる。

補題　2つの整数が互いに素であるとは，2つの整数の最大公約数が1であることをいう。
3つの整数が互いに素であるとは，3つの整数からどの2つの整数を選んでも，その選んだ2つの整数が互いに素になることと定義する。このとき，次のことが成り立つ。

(1) a，b は整数，L，M は正の整数，a と L は互いに素，b と M は互いに素で $\dfrac{a}{L}+\dfrac{b}{M}$ が整数となるならば，$L=M$ である。

(2) (i) a，b は整数，L，M は正の整数，L と M は互いに素で $\dfrac{a}{L}+\dfrac{b}{M}$ が整数となるならば，$\dfrac{a}{L}$ と $\dfrac{b}{M}$ はともに整数である。

(ii) a，b，c は整数，正の整数 L，M，N は互いに素で $\dfrac{a}{L}+\dfrac{b}{M}+\dfrac{c}{N}$ が整数となるならば，$\dfrac{a}{L}$，$\dfrac{b}{M}$，$\dfrac{c}{N}$ はすべて整数である。

[証明] (1) $\dfrac{a}{L}+\dfrac{b}{M}$ が整数だから

$$\frac{a}{L}+\frac{b}{M}=p\ (p\text{ は整数})$$

とおける。

$$a+\frac{bL}{M}=pL$$

と変形すると，$\dfrac{bL}{M}$ は整数となる。b と M は互いに素だから，M は L の約数である。
同様にして，L は M の約数となるから，$L=M$ である。

(2) (i) $\dfrac{a}{L}+\dfrac{b}{M}$ が整数だから

$$\frac{a}{L}+\frac{b}{M}=p\ (p\text{ は整数})$$

とおける。

$$a+\frac{bL}{M}=pL$$

と変形すると，$\dfrac{bL}{M}$ は整数となる。L と M は互いに素だから，M は b の約数となり，$\dfrac{b}{M}$ は整数である。

よって，$\dfrac{a}{L}=p-\dfrac{b}{M}$ も整数である。

(ii) $\dfrac{a}{L}+\dfrac{b}{M}+\dfrac{c}{N}$ が整数だから

$$\frac{a}{L}+\frac{b}{M}+\frac{c}{N}=p\ (p\text{ は整数})$$

とおける。

$$aM+bL+\frac{cLM}{N}=pLM$$

と変形すると，$\dfrac{cLM}{N}$ は整数となる。L と N，M と N は互いに素だから，N は c の約数となり，$\dfrac{c}{N}$ は整数である。

よって，$\dfrac{a}{L}+\dfrac{b}{M}=p-\dfrac{c}{N}$ が整数だから，(i)より $\dfrac{a}{L}$ と $\dfrac{b}{M}$ もともに整数となる。 ■

> (1) a，b を整数とする。a^2+b^2 が3で割り切れるならば，a，b はともに3で割り切れることを示せ。
> (2) $x^2+y^2=3$ を満たす有理数 x，y の組は存在しないことを示せ。　(1987 東京都立大)

[解答] (1)「a または b が3で割り切れないならば，a^2+b^2 は3で割り切れない」ことを示す。
一般に，整数 k に対して，
$(3k)^2=3\cdot 3k^2$，$(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1$，
$(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1$ だから，整数 n が3で割り切れないとき，n^2 を3で割った余りは1となる。

(i) a が3で割り切れて，b が3で割り切れない場合

a^2，b^2 を 3 で割った余りはそれぞれ 0，1

よって，a^2+b^2 を 3 で割った余りは 1

(ii) b が 3 で割り切れて，a が 3 で割り切れない場合

(i)と同様にして a^2+b^2 を 3 で割った余りは 1

(iii) a，b がともに 3 で割り切れない場合

a^2，b^2 を 3 で割った余りは 1

よって，a^2+b^2 を 3 で割った余りは 2

以上から，a または b が 3 で割り切れないならば，a^2+b^2 は 3 で割り切れない。

(2) $x^2+y^2=3$ を満たす有理数 x，y の組が存在すると仮定する。明らかに $xy \neq 0$ である。

このとき，$x=\dfrac{p}{q}$，$y=\dfrac{r}{s}$（p と q，r と s は互いに素な整数の組で，$q>0$，$s>0$）と表される。

また，q，s の最小公倍数を l（l は自然数）とすると，$l=qq'=ss'$ とおける。

よって，$x=\dfrac{pq'}{qq'}=\dfrac{pq'}{l}$，$y=\dfrac{rs'}{ss'}=\dfrac{rs'}{l}$ となるから，$pq'=m$，$rs'=n$ とおくと，m，n は整数で

$$\left(\frac{m}{l}\right)^2+\left(\frac{n}{l}\right)^2=3$$

ゆえに　$m^2+n^2=3l^2$　……①

よって，m^2+n^2 は 3 で割り切れるから，(1)より，m，n はともに 3 で割り切れる。

$m=3m_1$，$n=3n_1$（m_1，n_1 は整数）とおき，①に代入すると　$(3m_1)^2+(3n_1)^2=3l^2$

すなわち　$l^2=3(m_1{}^2+n_1{}^2)$

よって，l^2 は 3 の倍数となるから，l は 3 の倍数である。

$l=3l_1$（l_1 は自然数）とおくと

$$m_1{}^2+n_1{}^2=3l_1{}^2$$

同様にして，$m_1=3m_2$，$n_1=3n_2$（m_2，n_2 は整数）で $l_1=3l_2$（l_2 は自然数）となる。以下この操作を繰り返すと，無限列

$$l>l_1>l_2>\cdots>l_k>\cdots>0$$

が得られるが，l は有限な自然数であるから，これは不可能である。

したがって，$x^2+y^2=3$ を満たす有理数 x，y の組は存在しない。■

[別解(2)]　**補題(1)を使う。**

$x^2+y^2=3$ を満たす有理数 x，y の組が存在すると仮定する。明らかに $xy \neq 0$ である。

このとき，$x=\dfrac{p}{q}$，$y=\dfrac{r}{s}$（p と q，r と s は互いに素な整数の組で，$q>0$，$s>0$）と表される。

$x^2+y^2=3$ より $\dfrac{p^2}{q^2}+\dfrac{r^2}{s^2}=3$

p^2 と q^2，r^2 と s^2 は互いに素だから，補題(1)から $q^2=s^2$ すなわち $q=s$ となる。

したがって，$x=\dfrac{a}{c}$，$y=\dfrac{b}{c}$（a と c，b と c は互いに素な整数の組で，$c>0$）とおけることになる。

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=3$$

ゆえに　$a^2+b^2=3c^2$　……①

よって，a^2+b^2 は 3 で割り切れるから，(1)より，a，b はともに 3 で割り切れる。

$a=3a_1$，$b=3b_1$（a_1，b_1 は整数）とおき，①に代入すると　$(3a_1)^2+(3b_1)^2=3c^2$

すなわち　$c^2=3(a_1{}^2+b_1{}^2)$

よって，c^2 は 3 の倍数となるから，c は 3 の倍数である。

a と c は 3 を公約数としてもつので，互いに素であることに矛盾する。

したがって，$x^2+y^2=3$ を満たす有理数 x，y の組は存在しない。■

(1) $f(x)=x^3-6x^2-96x-80$ とする。$x \geqq 14$ ならば $f(x)>0$ となることを示せ。

(2) 自然数 a に対して $b=\dfrac{9a^2+98a+80}{a^3+3a^2+2a}$ とおく。b も自然数となるような a と b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　(2002 金沢大)

[解答]　(1) $f(x)=x^3-6x^2-96x-80$，

$f'(x)=3x^2-12x-96=3(x+4)(x-8)$

$x \geqq 14$ のとき，常に $f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は単調に増加する。また $f(14)=144$

よって，$x \geqq 14$ ならば　$f(x) \geqq f(14)=144>0$

(2) **補題(2)を使う。**

$$\begin{aligned} b &= \frac{9a^2+98a+80}{a^3+3a^2+2a} \\ &= \frac{9a^2+98a+80}{a(a+1)(a+2)} \\ &= \frac{40}{a}+\frac{9}{a+1}-\frac{40}{a+2} \quad \cdots\cdots(*) \end{aligned}$$

a と $a+1$，$a+1$ と $a+2$ は互いに素である。a と $a+2$ の最大公約数は 1 または 2 なので場合分けをする。

(i) a が奇数のとき

a，$a+1$，$a+2$ は互いに素で，(＊) が整数であることから，$\dfrac{40}{a}$，$\dfrac{9}{a+1}$，$\dfrac{40}{a+2}$ はすべて整数となる。

a は奇数だから，$\dfrac{9}{a+1}$ は整数とならないから，(＊) を満たす奇数 a は存在しない。

(ii) a が偶数のとき

$a=2a'(a'\geqq 1)$ とおくと

$$b=\frac{40}{a}+\frac{9}{a+1}-\frac{40}{a+2}$$

$$=\frac{20}{a'}+\frac{9}{2a'+1}-\frac{20}{a'+1} \quad \cdots\cdots(＊＊)$$

a'，$2a'+1$，$a'+1$ は互いに素で，(＊＊) が整数だから，$\dfrac{20}{a'}$，$\dfrac{9}{2a'+1}$，$\dfrac{20}{a'+1}$ はすべて整数となる。

$2a'+1(\geqq 3)$ は 9 の約数だから

$2a'+1=3,\ 9$　すなわち $a'=1,\ 4$

$a'=1$ のとき　$a=2$，$b=13$，

$a'=4$ のとき　$a=8$，$b=2$

したがって $(a,\ b)=(2,\ 13),\ (8,\ 2)$

(i)，(ii)から $(a,\ b)=(2,\ 13),\ (8,\ 2)$ ■

[注]　参考文献〔1〕では，(2)を次のようにうまく解いている。

b が自然数となるためには，$b\geqq 1$ から

$\dfrac{9a^2+98a+80}{a^3+3a^2+2a}\geqq 1$ となることが必要。

よって $9a^2+98a+80\geqq a^3+3a^2+2a$ すなわち

$a^3-6a^2-96a-80\leqq 0$

ゆえに，(1)から a は $1\leqq a\leqq 13$ を満たす自然数であることが必要。

また，$b=\dfrac{(a+10)(9a+8)}{a(a+1)(a+2)}$ と表される。

$a(a+1)(a+2)$ は連続 3 整数の積であるから 6 の倍数。よって，$(a+10)(9a+8)$ が 6 の倍数であることが必要。$9a+8$ は 3 の倍数でない。また，

$a+10$ と $9a+8$ の偶奇は一致するから，$a+10$ が 6 の倍数であることが必要。

$1\leqq a\leqq 13$ から $a=2,\ 8$

$a=2$ のとき $b=13$，$a=8$ のとき $b=2$

したがって $(a,\ b)=(2,\ 13),\ (8,\ 2)$ ■

《参考文献》

〔1〕 オリジナル数学演習 Ⅰ・Ⅱ・A・B 受験編

（元　栃木県立佐野高等学校）