デカルト・グアの定理と正射影
～平面から空間への拡張～

宮田（みやた）　毅一郎（きいちろう）

§1．直角三角形の拡張

2 辺の長さが a，b の長方形の対角線の長さが，$\sqrt{a^2+b^2}$（下図の $|\mathrm{AB}|$）で，3 辺の長さが a，b，c の直方体の対角線の長さは $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$（下図の $|\mathrm{OD}|$）となる。$c=0$ とおくと長方形の場合に帰着するので，平面から空間の場合への拡張と言える。

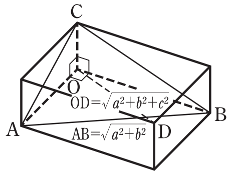
また，「互いに垂直な四面体（直角三角錐）OABC に対し

$\triangle\mathrm{OBC}=S_{\mathrm{A}}$，
$\triangle\mathrm{OCA}=S_{\mathrm{B}}$，
$\triangle\mathrm{OAB}=S_{\mathrm{C}}$，
$\triangle\mathrm{ABC}=S$

とおくと

$S^2=S_{\mathrm{A}}{}^2+S_{\mathrm{B}}{}^2+S_{\mathrm{C}}{}^2$ …(※)

が成り立つ。」



※OA$=a$, OB$=b$, OC$=c$

図 1

ことが知られている。これを「デカルト・グアの定理（De Gua's Theorem）」という。

平面から空間の場合への拡張という観点では下記のような対応になる。

平面		空間
ピタゴラスの定理	$\Longleftrightarrow$	デカルト・グアの定理
長方形	$\Longleftrightarrow$	直方体
直角三角形	$\Longleftrightarrow$	直角三角錐
三角形の辺	$\Longleftrightarrow$	直角三角錐の辺と面
辺の長さ	$\Longleftrightarrow$	直角三角錐の面の面積

私自身，ある本（参考文献〔1〕）を古本で手に入れた時から事実は知っていたものの，この定理の名前を知ったのは数年前である。この定理の証明自体は決して難しいものではないが，内容は教科書や準拠の問題集で紹介されることは少ない。

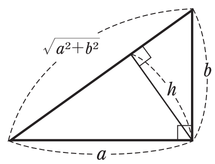
しかし，この事実を知っていれば，大学入試等の問題を解く際の検算道具として有効なだけでなく，ベクトルを利用する空間図形の問題の本質を捉える上でも，適切な題材と考え，いくつかの問題を通して，この定理の利用方法を紹介していきたい。

なお，空間からさらに一般の n 次元のベクトルを基本に n 次元空間に拡張できる定理だが，3 次元に止めて考えることにする。

§2．垂線の長さ

直角の 2 辺の長さが a，b の直角三角形で，直角の頂点から斜辺へ下ろした垂線の長さを h とし，この三角形の面積を 2 通りの方法で考えると，

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}h\sqrt{a^2+b^2}$$



より

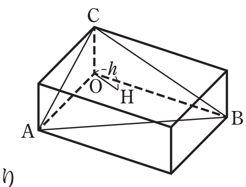
$$h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \cdots①$$

このとき

$$\frac{1}{h^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \quad \cdots②$$

一方，図 1 において，O から平面 ABC へ下ろした垂線の長さを h（下図の $|\mathrm{OH}|$），$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とし，この四面体の体積を 2 通りの方法で考えると，

$$\frac{1}{6}abc=\frac{1}{3}Sh$$



より

$$h=\frac{abc}{2S}$$

別計算（後述，問題 1）により

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

であるから　$h=\dfrac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ …③

このとき

$$\frac{1}{h^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \qquad \cdots④$$

①や③を②や④のような形で表すことにより，規則性が見やすくなり，2次元から3次元への拡張がイメージしやすくなると思われる。

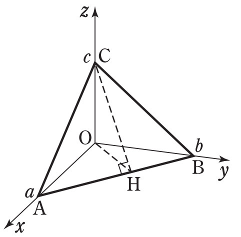
§3. デカルト・グアの定理を背景に持つ問題

数研出版の問題集4stepにも扱われている問題であり，前に述べた定理を背景に持つ問題の1つである。

問題1 ［2011年度一橋大］

a，b，cを正の定数とする。空間内に3点A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$がある。

(1) 辺ABを底辺とするとき，△ABCの高さをa，b，cで表せ。



略解 点Cから直線ABへ下ろした垂線をCHとする。①より

$$\mathrm{OH}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ゆえに

$$\mathrm{CH}=\sqrt{\mathrm{OH}^2+\mathrm{OC}^2}=\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+c^2}$$
$$=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}$$

(2) △ABC，△OAB，△OBC，△OCAの面積をそれぞれS，S_1，S_2，S_3とする。Oは原点である。このとき，不等式 $\sqrt{3}S \geqq S_1+S_2+S_3$ が成り立つことを示せ。

解答 $\mathrm{AB}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-a)^2+b^2+0^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

よって

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CH}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

また $S_1=\frac{1}{2}ab$，$S_2=\frac{1}{2}bc$，$S_3=\frac{1}{2}ca$

以下，略。

$((\sqrt{3}S)^2-(S_1+S_2+S_3)^2 \geqq 0$ を示せばよい。)

(3) (2)の不等式において等号が成り立つための条件を求めよ。

解答 $a=b=c$

この問題において

$$S^2=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2$$

となることにより，デカルト・グアの定理が成り立つことが示される。さらに，

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3}-\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2$$
$$=\frac{1}{3}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geqq 0$$

であるから

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geqq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2$$

（シュワルツの不等式）

$(x=y=z$ のとき，等号成立)

であることを利用して

$$\frac{S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2}{3} \geqq \left(\frac{S_1+S_2+S_3}{3}\right)^2$$

および $S^2=S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2$ から

$$\frac{S^2}{3} \geqq \left(\frac{S_1+S_2+S_3}{3}\right)^2$$

よって，$\sqrt{3}S \geqq S_1+S_2+S_3$

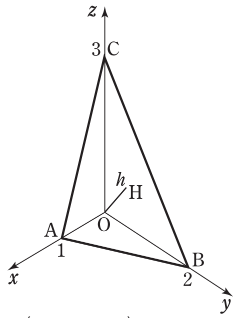
$(a=b=c$ のとき，等号成立)

が言える。

問題2 （四面体の高さ：ベクトル利用）

右の図のような4点O，A，B，Cについて，次のものを求めよ。

(1) 四面体OABCの体積V



解答 四面体OABCを△OABを底面とする高さOCの三角錐とみると

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{OAB}\times\mathrm{OC}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times1\times2\right)\times3=1$$

(2) △ABCの面積S

解答 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 3)$であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0-1,\ 2-0,\ 0-0)=(-1,\ 2,\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0-1,\ 0-0,\ 3-0)=(-1,\ 0,\ 3)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1)\times(-1)+2\times0+0\times3=1$$

よって $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+3^2}=\sqrt{10}$

これより

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$0°\leqq\angle BAC\leqq 180°$ より，$\sin\angle BAC\geqq 0$ である

から　$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

したがって

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=\frac{7}{2}$$

(3)　原点Oから平面 ABC へ垂線 OH を下ろすとき，線分 OH の長さ h

解答　$V=\frac{1}{3}Sh$

(1)，(2)より　$V=1$，$S=\frac{7}{2}$

よって，$1=\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}\times h$ より　$h=\frac{6}{7}$　答

この(2)において，

$$S_A=3,\ S_B=\frac{3}{2},\ S_C=1$$

であるから，グアの定理により

$$S^2=S_A{}^2+S_B{}^2+S_C{}^2=9+\frac{9}{4}+1=\frac{49}{9}$$

$S>0$ より　$S=\frac{7}{2}$

また，(3)は④により

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{49}{36}$$

$h^2=\frac{36}{49}$，$h>0$ より　$h=\frac{6}{7}$

と求めることができる。

問題3　[2006 年度センター本試験(数学Ⅰ・A)]

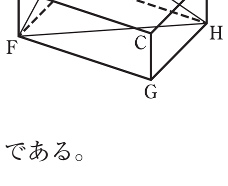
下の図のような直方体 ABCD-EFGH において，$AE=\sqrt{10}$，$AF=8$，$AH=10$ とする。このとき，

$FH=$ アイ $\boxed{}$

であり，

$\cos\angle FAH=\dfrac{ウ\boxed{}}{エ\boxed{}}$

である。



また，三角形

AFH の面積は オカ $\boxed{}\sqrt{キ\boxed{}}$ である。

この問題においても三平方の定理を用いて

$$EF=\sqrt{AF^2-AE^2}=\sqrt{8^2-(\sqrt{10})^2}$$
$$=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$$
$$EH=\sqrt{AH^2-AE^2}=\sqrt{10^2-(\sqrt{10})^2}$$
$$=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$$

であることより，前の問題と同様にグアの定理を用いて検算すれば △AFH の面積が $15\sqrt{7}$ となることが確認できる。

以上の問題１～３のような問題の場合，このような知識があれば簡単に検算可能である。

他にも，2014 東京大学 (理系) 前期日程１番(1)や 2014 北海道大学 (理系) 前期日程２番(2)もデカルト・グアの定理を用いれば，問題作成者の意図とは別に簡単に答を求めることができる。

§4. 平面から空間へ

座標空間の２点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ を結ぶ線分の長さを $|AB|$ とすると，ピタゴラスの定理より

$$|AB|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2$$

である。

座標空間から x 軸への正射影を p_x とする。このとき，p_x により点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は点 $A_x(a_1,\ 0,\ 0)$ に，点 $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ は点 $B_x(b_1,\ 0,\ 0)$ に写される。

よって，線分 AB の正射影 p_x による像を $(AB)_x$ で表すと，

$$(AB)_x \text{ の長さ}=|(AB)_x|=|b_1-a_1|$$

であり，同様に，y 軸と z 軸についても同様に考えると，ピタゴラスの定理により

$$|AB|=|(AB)_x|^2+|(AB)_y|^2+|(AB)_z|^2$$

であるから，その線分の x 軸，y 軸，z 軸への正射影の長さで表せる。

次に，１次元的な図形である線分の長さの次に，座標空間内の２次元的な図形の面積について拡張を考える。

座標平面上の点 $A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ に対して，△OAB の面積 S は，

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，θ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $(0<\theta<\pi)$ とすると　$S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ より

$$S^2=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)$$
$$=\frac{1}{4}\{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\}$$
$$=\frac{1}{4}\{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2\}$$
$$=\frac{1}{4}(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

これより，$S=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$ となることは知られている。

同様に，空間上の点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ に対して，△OAB の面積 S は $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ とすると同様に

$$S^2=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)$$
$$=\frac{1}{4}\{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\}$$
$$=\frac{1}{4}\{(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\}$$
$$=\frac{1}{4}\{(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2\}$$

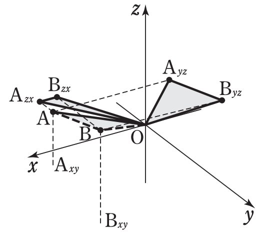
座標空間から x 軸への正射影を p_x とすると 2 点 A，B はそれぞれ点 A$_{xy}(a_1,\ a_2,\ 0)$，B$_{xy}(b_1,\ b_2,\ 0)$ に写される。△OAB に対し，xy 平面への正射影も三角形となり，△OA$_{xy}$B$_{xy}$ の面積 S_{xy} は

$$S_{xy}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

同様に S_{yz}，S_{zx} についても成り立ち，

$$S^2=S_{xy}{}^2+S_{yz}{}^2+S_{zx}{}^2$$

が成り立つ。これより，空間における三角形の面積を考えるときは，3 方向の正射影の面積から，三角形の面積もピタゴラスの定理のときのように，3 つの正射影の面積の 2 乗の和がもとの三角形の面積の 2 乗に等しくなるといえる。



このことより，(※)は △OBC$=S_{\mathrm{A}}$，△OCA$=S_{\mathrm{B}}$，△OAB$=S_{\mathrm{C}}$ はそれぞれ △ABC$=S$ の 3 方向の正射影の面積と考えればよいということになる。

なお，先述したようにグアの定理は三角形や四角形でなくても，平面の上に乗る図形ならば何でも良いことも知られている。

§5. 外積と正射影

平面ベクトルの外積については，教科書でも多少触れられているが，空間ベクトルの外積については大学の初年度で習うことになる。

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ に対して

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$
$$=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

で定義すると，$\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$ は $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ で張られる平行四辺形を各々，yz 平面，zx 平面，xy 平面へ射影した面積であり，

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{e_1}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\vec{e_2}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{e_3}$$

$(\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1))$

と表せる。

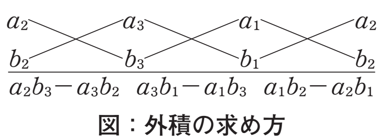
このとき，$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ とおくと

(1) $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直 $(\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0)$

(2) $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ がつくる平面に直交し，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ はこの順序で右手系をなす。

(3) $|\vec{a}\times\vec{b}|$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積 $\left(\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|\right.$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる三角形の面積$\left.\right)$ に等しい。

が成り立つ。



図：外積の求め方

§6. 原点から平面に下ろした垂線と平面の交点の座標

前の外積ベクトルの知識より，問題1において A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ に対して，原点Oから平面 ABC へ垂線 OH を下ろすときの点Hの座標を考えてみる。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-a,\ b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-a,\ 0,\ c)$

であり，

$\triangle\mathrm{OBC}=S_\mathrm{A}$，$\triangle\mathrm{OCA}=S_\mathrm{B}$，$\triangle\mathrm{OAB}=S_\mathrm{C}$,

とすると

$$S_\mathrm{A}=\frac{1}{2}bc,\ S_\mathrm{B}=\frac{1}{2}ca,\ S_\mathrm{C}=\frac{1}{2}ab$$

であるから,

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(bc,\ ca,\ ab)=(2S_\mathrm{A},\ 2S_\mathrm{B},\ 2S_\mathrm{C})$

より，例えば

$\vec{x}=S_\mathrm{A}\vec{e_1}+S_\mathrm{B}\vec{e_2}+S_\mathrm{C}\vec{e_3}$

$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{e_1}$，$\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\vec{e_2}$，$\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\vec{e_3}$ であるから

$$\vec{x}=\frac{S_\mathrm{A}}{|\vec{a}|}\vec{a}+\frac{S_\mathrm{B}}{|\vec{b}|}\vec{b}+\frac{S_\mathrm{C}}{|\vec{c}|}\vec{c}$$

とおくとき

$\vec{x}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{x}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

より　$\vec{x}$ は平面 ABC に垂直であり，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{x}$　(k は実数)

とおくことができる。このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\left(\frac{S_\mathrm{A}}{|\vec{a}|}\vec{a}+\frac{S_\mathrm{B}}{|\vec{b}|}\vec{b}+\frac{S_\mathrm{C}}{|\vec{c}|}\vec{c}\right)$$

とおくと，点Hが平面 ABC 上にあるので $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数の和が1より

$$k\left(\frac{S_\mathrm{A}}{|\vec{a}|}+\frac{S_\mathrm{B}}{|\vec{b}|}+\frac{S_\mathrm{C}}{|\vec{c}|}\right)=1 \text{ つまり}$$

$$k=\frac{1}{\dfrac{S_\mathrm{A}}{|\vec{a}|}+\dfrac{S_\mathrm{B}}{|\vec{b}|}+\dfrac{S_\mathrm{C}}{|\vec{c}|}}$$

となる。これを問題2に適用すると点Hの座標は

$$\frac{12}{49}\left(3,\ \frac{3}{2},\ 1\right)=\left(\frac{36}{49},\ \frac{18}{49},\ \frac{12}{49}\right)$$

であり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{12}{49}\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2}=\frac{12}{49}\sqrt{9+\frac{9}{4}+1}$$

$$=\frac{12}{49}\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{12}{49}\times\frac{7}{2}=\frac{6}{7}$$

となることより，この方法でも原点Oから平面 ABC へ下ろした垂線の長さを求めることができることが確かめられる。

注　1783年，Gua によって PariAcademy に提出されたので Gua の定理と呼ばれているが，既に Descartes および同時代の Faulhaber によって知られていたと言われているとのこと。
(http://mathworld.wolfram.com/deGuasTheorem.html)

《参考文献》

〔1〕 栗田稔著「大学への数学　問題はどう作られるか」(1985 東京出版)

(石川県立小松明峰高等学校)