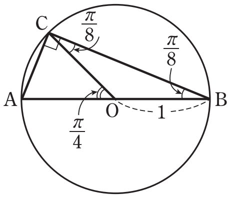
加法定理を用いずに倍角の公式を導く方法について

結川（ゆいかわ）　義明（よしあき）

§1. はじめに

$\sin\frac{\pi}{8}$ の値を半角の公式を用いず，余弦定理と単位円を使って次のような方法で求めてみた。



$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2-2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$$
$$=1+1-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=2-\sqrt{2}$$

$\mathrm{AC}>0$ より　$\mathrm{AC}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$

したがって　$\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

同様の方法で，加法定理を用いずに倍角の公式が導けることを発見した。ここでは，その方法を紹介する。

§2.　2倍角の公式を求める方法

(1)　余弦に関する2倍角の公式について

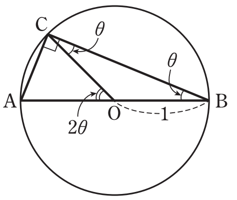


図1

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2-2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos 2\theta$$
$$=1+1-2\cdot\cos 2\theta$$
$$=2-2\cos 2\theta$$

$\mathrm{AC}>0$ より　$\mathrm{AC}=\sqrt{2-2\cos 2\theta}$

ここで，$\triangle\mathrm{ABC}$ において

$\sin\theta=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{2-2\cos 2\theta}}{2}$　より

$$2-2\cos 2\theta=(2\sin\theta)^2$$
$$-2\cos 2\theta=4\sin^2\theta-2$$
$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$$
$$=2\cos^2\theta-1$$

が得られる。

(2)　正弦に関する2倍角の公式について

図1より，$\triangle\mathrm{OAC}+\triangle\mathrm{OBC}=\triangle\mathrm{ABC}$　…①

ここで，

$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin 2\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$
$$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin(\pi-2\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$
$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot2\sin\theta\cdot2\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

よって，①より

$$\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

が得られる。

同様の方法で，n が偶数の場合の n 倍角の公式も導くことができる。

§3.　3倍角の公式を求める方法

図1において，点Cから辺ABに平行な線分を引き，単位円との交点をDとする。また，線分ADと線分OCの交点をPとする。$\angle\mathrm{APC}=3\theta$ となる。（図2）

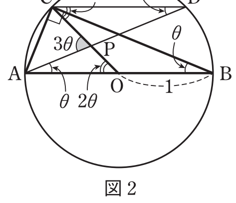


図2

△ACD に正弦定理を適用すると，

$$\frac{CD}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}=\frac{AC}{\sin\theta}$$

$AC=2\sin\theta$ であるから，

$$CD=2\cos 2\theta$$

また，$\triangle APO \backsim \triangle DPC$ より

$$CP:OP=CD:OA$$

$$CP\cdot OA=(OC-CP)\cdot CD$$

$OA=OC=1$ より

$$CP=\frac{CD}{1+CD}=\frac{2\cos 2\theta}{1+2\cos 2\theta}$$

同様に

$$AP=\frac{AD}{1+CD}=\frac{2\cos\theta}{1+2\cos 2\theta}$$

〈余弦に関する 3 倍角の公式について〉

△APC に余弦定理を適用すると

$$\cos 3\theta=\frac{AP^2+CP^2-AC^2}{2AP\cdot CP}$$

$$=\frac{\left(\frac{2\cos\theta}{1+2\cos 2\theta}\right)^2+\left(\frac{2\cos 2\theta}{1+2\cos 2\theta}\right)^2-(2\sin\theta)^2}{2\cdot\frac{2\cos\theta}{1+2\cos 2\theta}\cdot\frac{2\cos 2\theta}{1+2\cos 2\theta}}$$

$$=\frac{(2\cos\theta)^2+(2\cos 2\theta)^2-(2\sin\theta)^2\cdot(1+2\cos 2\theta)^2}{8\cos\theta\cdot\cos 2\theta}$$

$$=\frac{4\cos 2\theta+4\cos^2 2\theta-16\sin^2\theta\cos 2\theta-4\sin^2\theta\cos^2 2\theta}{8\cos\theta\cdot\cos 2\theta}$$

$$=\frac{(1-4\sin^2\theta)(1+\cos 2\theta)}{2\cos\theta}$$

$$=\{1-4(1-\cos^2\theta)\}\cdot\cos\theta$$

$$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

が得られる。

〈正弦に関する 3 倍角の公式について〉

図 2 より，$\triangle APC+\triangle APO=\triangle OAC$ …②

ここで，

$$左辺=\frac{1}{2}\cdot AP\cdot CP\cdot\sin 3\theta+\frac{1}{2}\cdot AP\cdot OP\cdot\sin(\pi-3\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot AP\cdot OC\cdot\sin 3\theta$$

$$=\frac{\cos\theta\cdot\sin 3\theta}{1+2\cos 2\theta}$$

$$右辺=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OC\cdot\sin 2\theta=\sin\theta\cos\theta$$

②より

$$\frac{\cos\theta\cdot\sin 3\theta}{1+2\cos 2\theta}=\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin 3\theta=\sin\theta(1+2\cos 2\theta)$$

$$=\sin\theta\{1+2(1-2\sin^2\theta)\}$$

$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

が得られる。

§4. おわりに

通常，2 倍角の公式は，数学Ⅱで学習する三角関数の中で加法定理の応用として指導される。ここで紹介した方法は，数学Ⅰの学習内容で求められるものである。

3 倍角の公式については，やや計算力を要するところはあるが，2 倍角の公式については，余弦定理や三角形の面積の公式から求めることができる。数学Ⅰの既習事項の確認として，2 倍角の公式を導かせても面白いのではないかと考える。

《参考文献》

〔1〕「改訂版　数学Ⅰ」数研出版

〔2〕「数学Ⅱ」数研出版

(埼玉県立豊岡高等学校)