2次不等式のグラフによる解法をめぐって
～統一的に方程式に帰結して解く方法～

中原（なかはら）　克芳（かつよし）

§0. はじめに

2次不等式

$ax^2+bx+c☆0$ ……①

($a \neq 0$, ☆には「＞，＜，≧，≦」のいずれかが入る）の解法は，現在の教育課程（学習指導要領）では高校1年生の「数学Ⅰ」で学ぶことになっています。そしてその解法には2次関数のグラフを用います。

ここまでは一見何の問題もないようですが，筆者が教師になったばかりの頃は，教科書では2次不等式の後に2次関数の単元があったため，因数分解した式の各々の符号から不等式の解を求める代数的な方法が書かれてありました。しかしこのような方法では，より一般の不等式を考える際には限界があるため，基本的には不等式は現在のグラフを使って解く方法が有効であると筆者は考えます（ただし1次不等式のみは式変形で良い）。

それでは現在の「数学Ⅰ」の教科書に書かれている2次不等式の解法は十分なものでしょうか。残念ながらそうではないと考えざるを得ません。その理由はたくさんありますが，決定的な問題点の1つは2次不等式の解法の前に「複素数」が指導されていないことでしょう。また2次不等式を解くための2次関数のグラフ指導にも改良すべき点が多々あるように思われます。そこで本稿ではこれらを中心に，最後は生徒の誤答を交えて，2次不等式にまつわる様々な報告をしていこうと思います。

§1. x 切片による2次関数のグラフ

2次不等式を解くためには，2次関数

$y=ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$ ……②

のグラフを利用しますが，それは $ax^2+bx+c>0$ であれば，②のグラフの y 座標が正の部分（x 軸より上側），また $ax^2+bx+c<0$ であれば，②のグラフの y 座標が負の部分（x 軸より下側）を満たす x がそれぞれの解の範囲になるということです（言わずもがなですが，不等号に等号が付いている場合は，x 軸上の点を含みます）。そしてこの方法で2次不等式の解を求めるためには，x 切片（グラフと x 軸との共有点）を求めることが重要であり，頂点の座標は不要です。すると2次不等式を解くためには，それまで練習してきた平方完成による頂点を求めてのグラフのかき方に固執する必要はないばかりか，2次不等式を解くのによりふさわしい方法が要求されることになるはずです。

その方法とは，x 切片，すなわち2次方程式

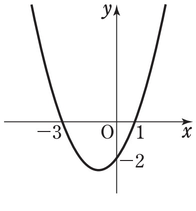
$ax^2+bx+c=0$ ……③

の解を用いて2次関数のグラフをかく方法です。しかし残念ながらその具体的方法等は教科書等にはあまり記述されていません。そこで，ここにまとめてみました。なお，以下の説明ではややくどい所もありますが，授業での説明を意識した記述にしました。

例1．(1)　$y=x^2+2x-3$

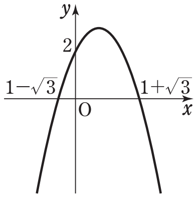
$y=0$ とおくと，$(x-1)(x+3)=0$ より，$x=1,\ -3$，これらが x 切片である。また x^2 の係数は正なのでグラフは下に凸である。よってグラフは図のようになる。

（生徒が慣れてきたら，いきなり $y=(x-1)(x+3)$ と因数分解して，$x=1,\ -3$ を x 切片としても良い。）



(2)　$y=-x^2+2x+2$

$y=0$ とおくと，$x=1\pm\sqrt{3}$ であり，これらが x 切片である。また x^2 の係数は負なのでグラフは上に凸であり，図のようになる。



なお(1)(2)とも，y 切片（y 軸との交点，すなわち $x=0$ のときの y の値）をとるようにすると間違いが減ります。また2次関数のグラフは y 軸に平行な直線について対称であることから，これらの放物線の軸は，(1)では $x=\dfrac{1-3}{2}=-1$，(2)では，

$x=\dfrac{1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{2}=1$ となります。（本論の趣旨からはずれますが，これらの値を代入して頂点の座標を求められることも知っておくとよいでしょう。）

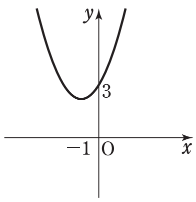
次に，$D=0$ のときは x 軸上に頂点がくる，すなわち x 軸に接します。

それでは $D<0$ となる場合を考えてみましょう。

例2． $y=x^2+2x+3$

まず x^2 の係数は正なのでグラフは下に凸である。次に $y=0$ とおくと，$x=-1\pm\sqrt{-2}$ となり，ルートの中が負になってしまう（現行の教育課程では「虚数解」という表現が使えない）ため，x 切片は存在しない。しかし実はこの場合もこれらの2つの解の相加平均

$\left(x=\dfrac{-1+\sqrt{-2}-1-\sqrt{-2}}{2}=-1\right)$ が軸になるのである（＊）。よって y 切片と合わせれば，グラフは図のようになる。



（＊注）　一般に $ax^2+bx+c=0$ において $D<0$ のとき，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ を $y=a(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ と因数分解したとき（α，$\overline{\alpha}$ は複素共役），解と係数の関係により，$\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=-\dfrac{b}{2a}$ となって，2解の相加平均が軸になることが分かる。しかし複素数も，その加法も，解と係数の関係もすべて未習のため，ここまで授業で説明できないのが残念である。

以上をまとめると，2次関数のグラフを x 切片からかく方法は，次のようになります。

〈2次関数のグラフを x 切片からかく方法〉

2次関数 $y=ax^2+bx+c$（…②）　のグラフを，x 切片，すなわち2次方程式

$ax^2+bx+c=0$　（…③）

の解からかくには，③の判別式を

$D=b^2-4ac$

とすると，

(1)　$D>0$ のときは，③の異なる2つの実数解を②の x 切片とすれば良い。

(2)　$D=0$ のときは，重解が x 軸との接点になる。

(3)　$D<0$ のときは実数解が存在しないが，その相加平均を②の軸とし，x 軸と共有点をもたないグラフをかけば良い。

なお，筆者は平方完成による，頂点を求めてグラフをかく方法を否定しているわけではありません。最大・最小の問題では頂点の座標は不可欠です。要は問題に応じた方法でグラフをかくことができるようにすることが最善であると考えています。

§2.　2次不等式の解法

次に2次不等式の解法について考えてみましょう。冒頭で述べたように，2次不等式を解くためには2次関数のグラフを利用しますが，前節の説明から，グラフをかく際必要なものは x 切片であり，頂点（平方完成）は不要でした。

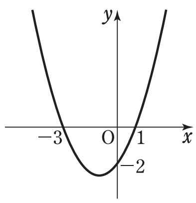
例3．(1)　$x^2+2x-3>0$

関数 $y=x^2+2x-3$

$\qquad=(x-1)(x+3)$

のグラフは図のようになり（x 切片は1，-3），$y>0$ の部分は x 軸の上側なので，

求める範囲は　$x<-3$，$1<x$



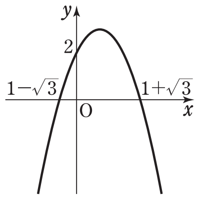
(2)　$-x^2+2x+2>0$　……④

関数 $y=-x^2+2x+2$ のグラフは，x^2 の係数は負なので上に凸。

$-x^2+2x+2=0$ ……⑤　とおくと　$x=1\pm\sqrt{3}$ なので，グラフは図（次ページ）のようになる。

よって，④の解は，$1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$ である。

例 3⑵で大切な点は，2つあります。それは今の例では元のままの不等式をグラフに表しましたが，x^2 の係数が負の場合は両辺に -1 を掛けて（当然このとき不等号の向きも変わる），グラフを下に凸にしてから解く方法も（そしてどちらも同じ答になることも），合わせて指導しておく必要があります。



もう 1 つは波下線の部分です。「とおくと」の一言を書かないと，生徒は今自分が方程式を解いているのか不等式を解いているのかの区別がつかなくなってきます。生徒も慣れてくると面倒なためか，この一言を書かずに解くようになりますが，常に不等式を解いていることを意識させるためにも，必ず記述するよう日頃から指導しています。この記述の煩雑さを減らすためには，上記例のように式に番号を振るのも一法でしょう。

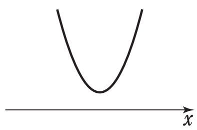
また例 3 では 2 問ともグラフをかくために y 軸および y 切片をかきましたが，これらは慣れるに従って省略すべきでしょう。

それでは次に $D<0$ の場合を説明しましょう。

例 4． $2x^2-4x+3>0$ ……⑥

$2x^2-4x+3=0$ とおくと，

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{-2}}{2}$ となるため グラフは x 切片をもたず，右のようになる。



ここで x 軸の上側の部分が求める不等式の解になるから，⑥の解は「すべての実数」である。

同様に，$2x^2-4x+3<0$ ……⑦ の解は x 軸の下側の部分であるため，⑦は「解なし」となる。

$D<0$ の場合，教科書では平方完成 $y=2(x-1)^2+1$ をしたり，また判別式 $\dfrac{D}{4}=2^2-2\cdot3=-2<0$ の符号を調べたりと，様々な方法で x 切片がないことを説明されていますが，これでは生徒が具体的な問題を解く際，どのような場合は 2 次方程式を解いて，どのような場合は平方完成をして，どのような場合は判別式を調べるかがわかりません。それよりも，2 次不等式を解くためには補助的に 2 次方程式を解いて，グラフから解を求めるように方法を統一することが生徒にとって最もわかりやすいのではないでしょうか。

$D<0$ の場合の指導でもう 1 点気をつけることがあります。それは慣れれば問題はありませんが，初めて習う生徒にとって不等式の解が「すべての実数」「解なし」ということは意外にわかりにくいものです。これを補うためには，もとの不等式⑥の左辺の x に様々な数値を代入して，常に不等式が成り立つ（⑦の場合は決して成り立たない）ことを確認させることも大切な指導だと思います。

$D=0$ の場合は，等号の有無を含めて場合分けが 4 通りと複雑になりますが，これらもグラフをかけば実践的に解決できるため，割愛します。

〈結論 2 次不等式を解くための実践的な方法〉

D の正負・$=0$ に関わらず，与えられた 2 次不等式を整頓し，2 次の係数を正，右辺を 0（$ax^2+bx+c☆0$ の形（$a>0$，☆には「$>$，$<$，$\geqq$，$\leqq$」のいずれかが入る））にする。そして

⑴ 左辺を因数分解できれば因数分解し，x 切片によりグラフをかく（接するときも含める）。そして不等号の向き，等号の有無により，解を決定する。

⑵ 左辺が因数分解できないときは，補助の方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解く。この方程式が実数解をもつときはそれらを x 切片としてグラフをかいて，⑴と同様に考える。実数解をもたないときは x 軸と共有点をもたないグラフをかき，不等号の向きで x 軸の上側か下側かを判断し，解を決定する。

この方法であれば，その後のグラフを読み取る力は要求されますが，取りかかりが 2 通りしかない（しかも生徒は因数分解にはそれなりに馴染んでいるので自然に取り組める）ので，生徒にも取り組みやすいことと思います。

§3. 定期テストでの生徒の解答から

最後に，この小論の主題である「２次不等式の解法」とは直接関係はありませんが，本校で行われた定期テストでの生徒の解答から，気になったことをいくつか報告しましょう。恐らく多くの先生方にも共感していただけることと思います。

例５． $x^2<4$ ……⑧

［生徒の誤答］ $x<\pm 2$ ……⑨

よって $-2<x<2$ ……⑩

［解説］ この誤答は最も多いと思われます。途中⑨は間違っていますが，最終的な解⑩は正しくなっています。これはおそらく⑨を補助方程式 $x^2=4$ を解いているつもりなのでしょう。この間違いに対しては，数直線を描いて⑨と⑩は相容れないことを説明しています。しかしそれよりも，２節例３⑵でも触れましたが，要は自分がいま方程式を解いているのか不等式を解いているのかの区別ができずに問題に取り組んでいるところに問題点が潜んでいるようです。まずは自分が今どんな問題を解こうとしているかを意識させることが必要なのでしょう。

なお，例５．の不等式とは違いますが，

$x^2-4x<0$

も誤答が多い不等式です。同様に生徒は２次関数 $y=x^2-4$ の頂点も間違えます。それだけ生徒にとっては０という係数は特殊なのでしょう。

($y=x^2-4$ の頂点についていえば，

$y=x^2-0\cdot x-4=(x-0)^2-4$ と考えるように言うだけで間違いが減ります。)

例６． $x^2-2x+4>0$ ……⑪

［生徒の誤答］ $x^2-2x+4=0$ とおくと，

$x=1\pm\sqrt{-3}$ となるため，

$x<1-\sqrt{-3}$，$x>1+\sqrt{-3}$

［解説］ これも多い誤答で，実は今回の「方程式に帰結して２次不等式を解く方法」の最大の弱点です。２次方程式の実数解が存在しないときは x 切片が存在しないことを，グラフをかくようしつこく言うことで減少しますが，それでも少し時間が経つとこの解答が増えてしまいます。また虚数解が出た時点で「解なし」と結論付ける答案も見られます。生徒には，数学は答を覚える学問ではなく考える学問であることを言い続け，とにかく解の意味を考えながらグラフを描いて，そのグラフを読み取るよう習慣付けたく思います。

例７． ２次不等式 $x^2-2x-4<0$ を満たす整数 x をすべて求めよ。

［正解例］ $x^2-2x-4=0$ とおくと，$x=1\pm\sqrt{5}$

したがって，$1-\sqrt{5}<x<1+\sqrt{5}$

ここで，$2<\sqrt{5}<3$ なので

$-2<1-\sqrt{5}<-1$，$3<1+\sqrt{5}<4$

$\therefore$ $x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

［生徒の解答］ $x^2-2x-4=0$，$x=1\pm\sqrt{5}$

（＊） $\therefore$ $x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

［解説］ この問題は，Ⓐ「２次不等式を解く（解を不等式で表す）」ことを前提とし，その上でⒷ「その解を満たす整数 x を求める」ことを要求しています。しかしこの答案ではⒶを省略し，いきなりⒷを求めています。これは答さえ合えば良いと思っている生徒に見られがちな解答です。これでは解答の一部分でも間違えたら全く得点できません。ところがⒶの解 $1-\sqrt{5}<x<1+\sqrt{5}$ が書いてあれば，最後の答を間違えても，部分点が与えられます。もちろん点数だけの問題ではありません。生徒には，数学の問題を解くとはどういうことか，筋道を立てて考え，それを記述する方法までできるようになってほしいと願っています。

なお，Ⓐの解は書いていなくても，（＊）の箇所の前後に数直線や放物線をかいて不等式の解を暗示している者や，$2<\sqrt{5}<3$，$\sqrt{5}=2.2\cdots$ 等の理由を書いている（良心的な）生徒もいます。そのような答案には，間違っていても，つい部分点を与えたくなるものです。

§4. おわりに

現場で生徒に接していると，数学が苦手な生徒ほど答さえ合えばよいと考え，また説明・グラフをかきたがらない傾向が強いようです。数学は式だけでなく図・グラフ・表等をかいて総合的に考える学問であること，またテストでは答が正しいか否かだけではなく，その答を得る過程を記述する必要があることを強調して，今後も指導にあたりたいと思います。

（広島県　広島女学院中学高等学校）