正七角形のはなし

内藤（ないとう）　康正（やすまさ）

§1. はじめに

図１のような３種類の二等辺三角形 $\triangle P_1P_2P_3$，$\triangle Q_1Q_2Q_3$，$\triangle R_1R_2R_3$ を考えます。等辺の長さはいずれも１で，それぞれの内角は頂角が θ，3θ，5θ，底角が 3θ，2θ，θ $\left(ただし\ \theta=\dfrac{180°}{7}\right)$ になっています。

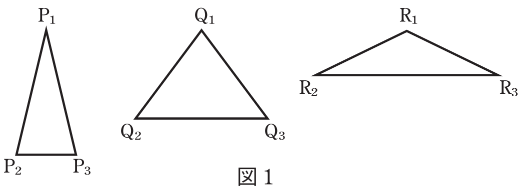


図１

「この３種類の二等辺三角形を裁ち合わせて正七角形にしよう」という作業を授業に取り入れることがあります。定木とコンパスで作図ができないことからキリの悪いイメージの強い正七角形ですが，二等辺三角形の型紙を生徒に配ると，半信半疑で手を動かしながらも作業に熱中し，あっという間に時間が過ぎていきます。

また最近，１辺の長さが１の正七角形について，２種類の対角線の長さ x，y が関係式 $xy=x+y$ を満たすことをできるだけ初等的に導くという自由課題を生徒に課したところ，思いのほか色々なレポートが届き，さまざまなアイディアがあることを知りました。整理をしてみると二等辺三角形の裁ち合わせとの接点も見出せ，正七角形は様々な単元の横断的な学習教材になり得るのではないかと感じました。

そこで，次のような問題を設定・解決していく形の小文にまとめてみることにしました。

問題

> ３種類の二等辺三角形を裁ち合わせて，１辺の長さが１の正七角形にするには，それぞれ何枚ずつ必要か。

§2. 裁ち合わせの例

正七角形には２種類の長さの対角線があります。

本稿では図２のように，対角線の長さを短い順に x，y とします。

（正七角形の１辺は１）

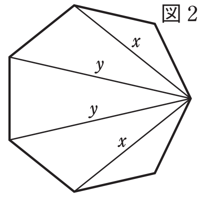


図２

この図２を眺めていると冒頭の裁ち合わせの解として図３のような例が見つかります。

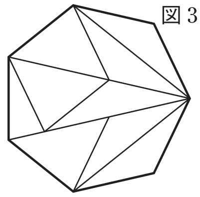


図３

$\triangle P_1P_2P_3$ が１枚，
$\triangle Q_1Q_2Q_3$ が３枚，
$\triangle R_1R_2R_3$ が５枚

の合計９枚で敷き詰められています。§1. で設定した問題は，裁ち合わせに用いる枚数の組合せはこれ以外にないことを示すところまでを要求しており，次の課題に沿って進めていきたいと思います。

課題

> 【１】　対角線の長さ x，y が関係式 $xy=x+y$ を満たすことをできるだけ初等的に示す。
> 【２】　他の関係式を見つける。
> 【３】　x が満たす３次方程式を導く。さらに，x が満たす有理数係数の３次未満の方程式があるか調べる。

ここで，x は $\triangle R_1R_2R_3$ の底辺の長さですから，$x=\cos\theta$ $\left(\theta=\dfrac{180°}{7}\right)$ であることに注意しておきます。

§3. 対角線の長さが満たす関係式

図4は正七角形ABCDEFGに5本の対角線を引いたものです。

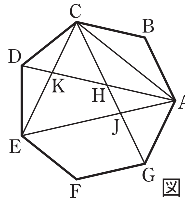


図4

図中に角θを「・」印1つで記入していくと，二等辺三角形が次々と見つかります。

次にこの図に現れる線分（のいくつか）を対角線の長さx，yで表してみます。

$\triangle AHG \equiv \triangle Q_1Q_2Q_3$ から $AH=1$ なので

$DH=DA-AH=y-1$

$\triangle EKD \equiv \triangle P_1P_2P_3$ から $EK=1$ なので

$KC=CE-EK=x-1$

$\triangle JGA \equiv \triangle KHC$ から $JA=KC=x-1$ なので

$EJ=EA-JA=y-x+1$

などとなります。これで，課題【1】は思いのほか簡単に解決できます。

課題【1】の解決

$\triangle CDH \backsim \triangle CEA$ より

$CD:DH=CE:EA$

$1:(y-1)=x:y$

よって　$1\cdot y=(y-1)x$

$\therefore\quad xy=x+y\quad\cdots\cdots①$　■

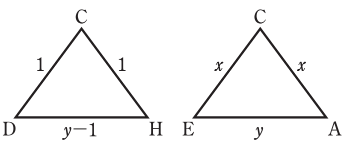


図5

$\triangle Q_1Q_2Q_3$に相似な三角形はいくつかありますが，図5に挙げたものからは，①以外の新しい関係式は得られません。（ただ，①は $(x-1)(y-1)=1$ とも表せることなどに気づかされます。）

他にも，面積を利用して

$\triangle ACG=\triangle ACH+\triangle AHG$

$\triangle AHG=\triangle AHE$

からも①は導けますし，図6において等脚台形の性質として上底 $BG=x$ と下底 $CF=y$ の調和平均が $PR=2$（$\because$ $\triangle QBP \equiv \triangle QRG \equiv \triangle P_1P_2P_3$）となることからも，

$1=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の形で ① が得られますが，次の課題も引き続き三角形の相似を利用していくことにします。

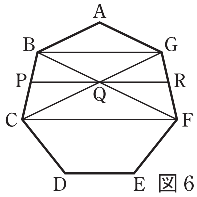
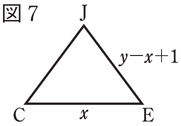


図6

課題【2】の解決

図7



$\triangle CDH \backsim \triangle JCE$ より

$DH:HC=CE:EJ$

$(y-1):1=x:(y-x+1)$

$(y-1)(y-x+1)=x$

$\therefore\quad y^2=xy+1\quad\cdots\cdots②$

また，$\triangle KHC \backsim \triangle JCE$ より

$HC:CK=CE:EJ$

$1:(x-1)=x:(y-x+1)$

$1\cdot(y-x+1)=x(x-1)$

$\therefore\quad x^2=y+1\quad\cdots\cdots③$　■

図4での（あるいは図4に限らず）他の相似な三角形からもいろいろな方程式が得られますが，本質的なのは①②③の3式です。（参考文献〔1〕）

なお実際にはx，yの関係ですから式は2つで十分で，①～③は独立ではありません。

§4. 3次方程式

いま得られた①～③を用いると，x，yが満たす方程式がそれぞれ得られます。

課題【3】前半の解決

①と③からyを消去すると

$x(x^2-1)=x+(x^2-1)$

$\therefore\quad x^3-x^2-2x+1=0\quad\cdots\cdots④$　■

これが，正七角形の対角線の短い方の長さxが満たす方程式です。長い方の長さyについては

$y^3-2y^2-y+1=0$

となります。

課題【3】後半の解決

④がもし有理数の解 $x=\dfrac{q}{p}$（p，qは互いに素な整数）をもつと仮定すると

$$\left(\frac{q}{p}\right)^3-\left(\frac{q}{p}\right)^2-2\left(\frac{q}{p}\right)+1=0 \quad \cdots\cdots⑤$$

両辺に p^2 を掛けて整理すると

$$\frac{q^3}{p}=q^2+2pq-p^2$$

右辺は整数なので，p，q は互いに素であったことから左辺の分母は　$p=1$

よって⑤は　$q^3-q^2-2q+1=0$

$$1=-q(q^2-q-2)$$

ここで右辺の因数は整数なので

$$q=\pm1,\ q^2-q-2=\mp1 \quad (\text{複号同順})$$

これを満たす整数 q はなく，④は有理数の解をもたない，すなわち④の左辺は有理数係数の１次式と２次式の積に因数分解できない。よって，x が満たす有理数係数の３次未満の方程式はない。■

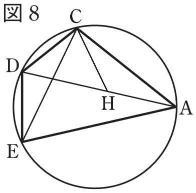
これで，④の左辺が $x=2\cos\theta$ の最小多項式ということがわかりました。

§5. 寄り道

ここで少し寄り道をしてみたいと思います。１つ目の寄り道はトレミーの定理に関してです。

図８は図４の一部ですが，四角形ACDEにトレミーの定理を用いると，次のように直ちに①が得られることは有名です。

図８



$$\mathrm{CD}\times\mathrm{EA}+\mathrm{DE}\times\mathrm{AC}$$
$$=\mathrm{CE}\times\mathrm{DA}$$
$$1\times y+1\times x=x\times y$$
$$\therefore\quad x+y=xy \quad \cdots\cdots①$$

②や③も同様に他の（円に内接する）四角形にトレミーの定理を用いて得られます。

ところでトレミーの定理といえば，その証明に必要な補助線は思いつかないという印象が強い定理ではないでしょうか。しかし，§3. で示した初等的な証明に用いた $\triangle\mathrm{CDH}\backsim\triangle\mathrm{CEA}$ に現れる線分CHが「あの補助線」になっています。思いつく術がないと思われた補助線を知らないうちに引いていた，というのは不思議な体験だと思います。

２つ目の寄り道は，３次方程式④の解

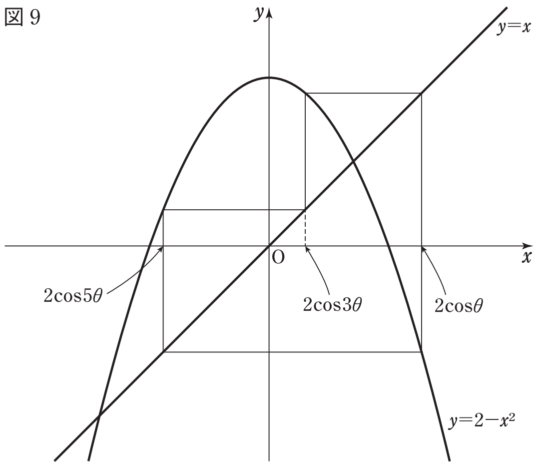
$$2\cos\frac{\pi}{7},\ 2\cos\frac{3\pi}{7},\ 2\cos\frac{5\pi}{7}$$

についてです。これらの解は２次関数 $y=2-x^2$ で図９のように巡回します。（参考文献〔２〕）

このような解の巡回を背景にもつ大学入試問題は古くから姿かたちを変えながら出題され続けており，学習意欲の高い生徒にとっては，有意義な話題だと思います。

閑話休題。

図９



§6. 問題の解決

$x=2\cos\theta$ より，１辺の長さが１の正七角形の面積 S は，簡単な計算から $S=\dfrac{7\cos\theta}{4\sin\theta}=\dfrac{7x}{8\sin\theta}$ と分かります。また，二等辺三角形 $\triangle\mathrm{P_1P_2P_3}$，$\triangle\mathrm{Q_1Q_2Q_3}$，$\triangle\mathrm{R_1R_2R_3}$ の面積を P，Q，R とすると，

$$P=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$$

$$Q=\frac{1}{2}\sin3\theta=\frac{1}{2}(4\cos^2\theta-1)\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-1)\sin\theta$$

$$R=\frac{1}{2}\sin5\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta=\frac{1}{2}x\sin\theta$$

なので，それぞれ p，q，r 枚を用いて正七角形を裁ち合わせるとすると

$$pP+qQ+rR=S$$

すなわち

$$\frac{p}{2}\sin\theta+\frac{q}{2}(x^2-1)\sin\theta+\frac{r}{2}x\sin\theta=\frac{7x}{8\sin\theta}$$

が成り立ちます。p，q，r という3つの未知数に対して条件式はこの1つですから，この時点では解決できなさそうに思われます。しかし，これを x について整理していくと，

$$8\left\{\frac{p}{2}+\frac{q}{2}(x^2-1)+\frac{r}{2}x\right\}\sin^2\theta=7x$$

$$\{p+q(x^2-1)+rx\}(4-4\cos^2\theta)=7x$$

$$(p-2q+r)x^2+(q-2r+7)x$$
$$-(4p-3q+r)=0 \quad \cdots\cdots⑥$$

となります。

$x=2\cos\theta$ の最小多項式は課題【3】で調べたとおり3次でした。ですから⑥が2次方程式や1次方程式であってはならず

$$\begin{cases} p-2q+r=0 \\ q-2r+7=0 \\ 4p-3q+r=0 \end{cases}$$

となり，これを解いて $p=1$，$q=3$，$r=5$ を無事得ることができます。これで，正七角形の敷き詰めに要する二等辺三角形の枚数の組は1枚，3枚，5枚しかないということがわかりました。

x^2，x，1は有理数体上で一次独立であることからの，見かけ上の1つしかない条件式からの決着です。

§7. むすび

数学Iで，p，q を有理数として

$$p+q\sqrt{2}=0 \iff p=q=0$$

を扱った求値問題があります。これも，$\sqrt{2}$ の最小多項式が2次の $x^2-2=0$ であって，1次方程式 $p+qx=0$ の解にはなり得ないという見方を紹介することで理解の幅が広がると思います。いずれにせよ，この種の求値問題が具体的な問題解決に役立つ例は普段はあまり見かけません。その点，不思議な満足感が得られる結末だと思います。

生徒の実態に合わせた提示の仕方を工夫することで正七角形がアクティブラーニングの素材としても活用できるのではないかと感じました。

《参考文献》

〔1〕 現代数学 2015年4月号（現代数学社）
一松信『ミニ数学を創ろう』

〔2〕 理系への数学 2010年10月号（現代数学社）
内藤康正
『3次方程式 $x^3-3x+1=0$ のはなし』

（東京都立立川高等学校）