

周期 ～数の新たな分類～

きたじま
北島 かおる

§1. はじめに

数年前、同級生の1人にお子さんが生まれたことをきっかけに、ほぼ十年ぶりに大学時代の友人たちと集う機会があった。その時、友人の1人が最近の研究について語ってくれた。周期 (Period) という、数の比較的新しい分類法である。

§2. 高校までに学ぶ数の分類

まず、高校までに学ぶ数の分類 (数の拡張) とその高校生に対する説明を、教科書 (数研出版 新編数学 I および数学 II) に基づいてまとめてみよう。

自然数 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

整数 \mathbb{Z} 自然数と負の整数および0からなる数

有理数 \mathbb{Q} 整数 m と0でない整数 n を用いて $\frac{m}{n}$ と表される数

実数 \mathbb{R} 整数と、有限小数または無限小数を合わせたもの

※有理数でない実数を無理数という

複素数 \mathbb{C} 虚数単位 i と2つの実数 a, b を用いて $a+bi$ の形で表される数

※ $b \neq 0$ のとき、虚数という

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

§3. 代数的数と超越数

高校の指導要領の範囲ではないが、有理数と複素数の間には別の分類もある。

ガウスによる代数学の基本定理により、

「任意の複素数係数多項式に対して、方程式

$$a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0, \quad n > 0$$

は解 $x \in \mathbb{C}$ をもつ」

ことは保障されているが、特に、有理数係数の代数方程式を満たすすべての $x \in \mathbb{C}$ の集合を代数的数 $\overline{\mathbb{Q}}$ という。逆に、そうでない複素数を超越数という。

例えば、 $\sqrt{2}$ は有理数係数の代数方程式 $x^2 - 2 = 0$ の解なので、代数的数である。また、円周率 π やネイピア数 e 、 $\log 2$ などは超越数であることが知られている。

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}} \\ \cap \quad \cap \\ \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \end{aligned}$$

§4. 周期とは

一番初めに超越数であることが証明されたのはリウヴィル数であり、その代表的な例は

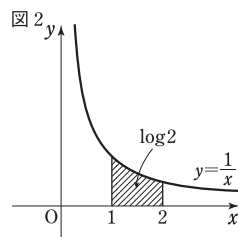
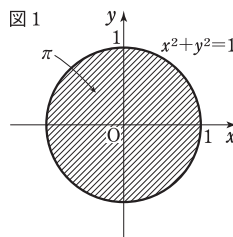
$$\ell = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0.11000100 \dots 00100 \dots 00100 \dots$$

$\uparrow \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 小数第1位 2位 6位 24位 120位

である。(リウヴィル数については、数研通信 No.83 で才野瀬先生が興味深い記事を書かれているので、参考にされたい。)

さて、友人は私たちに問いかけた。

「 π も $\log 2$ もリウヴィル数も、同じ超越数というクラスに分類される。しかし、前の2つとリウヴィル数の間には、何か違いが感じられないだろうか。」前の2つが自然発生的な数であるのに対し、リウヴィル数は少し人工的な印象がある。「周期」という概念の導入により、この感覚の違いを数学的に表して分類することができる。大まかなイメージとしては、前者2つは有理数係数のみの式で表された領域の面積として表される、ということである (図1, 図2)。



これを、数学の言葉できちんと定義すると以下のようになる。

定義：ある複素数が周期 (Period) であるとは、その実部と虚部が、有理数係数多項式の不等式で与えられる \mathbb{R}^n 内の領域上での、有理数係数の有理関数の絶対収束積分の値になっていることである。

周期全体の集合を \mathcal{P} と書く。

周期の例をいくつか挙げてみよう。

(1) a が有理数のとき、

$$a = \int_0^a dx$$

よって、有理数は周期、すなわち $\mathbb{Q} \subset \mathcal{P}$

(2) n が自然数のとき、

$$\sqrt{n} = \int_{x^2 \leq n} \frac{1}{2} dx \left(= \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \frac{1}{2} dx \right)$$

一般に、代数的数は周期であることがわかっていく。すなわち $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{P}$

(3) a が有理数のとき、

$$\log a = \int_1^a \frac{1}{x} dx$$

すなわち $\log a \in \mathcal{P}$

(4)

$$\pi = \int_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \left(= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \right)$$

すなわち $\pi \in \mathcal{P}$

(2)と(3)(4)より、 $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathcal{P}$

e や $\frac{1}{\pi}$ は周期ではないと予想されているが、証明はまだのようである。しかし、参考文献[4]により周期でない実数が構成されており、このことより $\mathcal{P} \subsetneq \mathbb{C}$ がいえる。すなわち、

$$\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathcal{P} \subsetneq \mathbb{C}$$

§5. 高校の学習への関連付け

周期の定義を正確に理解するためには大学教養レベルの積分の知識が必要になるが、以下の理由で、高校生の数学学習への動機づけとして有効に利用できるのではないかと考える。

- (1) 自然数～複素数に至る数の分類は高校2年生までに系統的に学んでおり、数を分類するという考えは自然に受け入れられると思われる。
- (2) 正確な定義の理解は難しいものの、図1、図2のように視覚的に示すことができ、イメージしやすい。また、数学Ⅱの「図形と方程式」や数学Ⅲの積分の分野と関連付けることができる。
- (3) まだ未解決の部分も多く、将来研究の余地があるという期待を持たせることができる。

手軽な数学啓蒙書やインターネット等では、周期に関する話題を取り上げているものはまだ数少ない。しかし、今後、周期という新しい見方が、数の世界に新たな広がりを与えてくれることを期待する。

〈参考文献〉

- [1] 新編 数学Ⅰ, 新編 数学Ⅱ 数研出版
- [2] 「超越数について」 才野瀬一郎 数研通信 No.83
- [3] 数学の最先端 21世紀への挑戦, 第1巻B. エンクウイスト/W. シュミット編 Springer
- [4] M. Yoshinaga, *Periods and elementary real numbers*, preprint 2008, Math: arXiv: 0805.0349. (インターネットより入手)
(京都府 ノートルダム女学院中学高等学校)