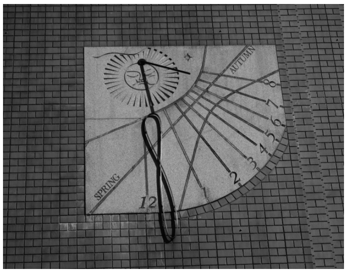
正午の太陽（アナレンマ）

もりしま　みつる
森島　充

§1. はじめに

冬至は1年で日中の時間が一番短い日ですが，日の出や日の入りの時刻は，一番遅かったり早かったりする訳ではないようです。原因は，たぶん地球が楕円軌道だからだろうと思っていたのですが，地軸の傾きにも原因があるそうです。なぜ楕円軌道と地軸の傾きでずれが生じるのでしょうか。

東京都立の首都大学には正門脇の校舎の外壁に大きな日時計があります。写真は冬至の正午です。



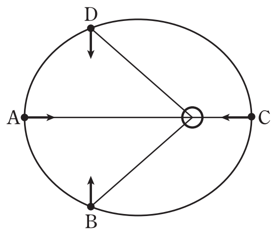
そこには8の字型の飾りのような物が付いていて，影の先がちょうど「8の字」の先端にきています。おそらく正午の影の位置が季節によって変化することを表しているのではないでしょうか。だとすると，南中の時刻も季節によって変化して，それで日の出日の入りの時刻もずれると考えられます。そうすれば，日の出日の入りの一番早い日遅い日も夏至冬至からずれることになります。

正午の太陽の位置が，1年を通じてどのように変化するのかを概算してみることにします。

§2. 楕円軌道によるずれ(1)

図1は，「上」から見た地球の楕円軌道です。誇張して離心率を大きく描きました。白丸が太陽です。地球の公転の方向は，自転と同じで「上」から見て反時計回りだそうです。周上に $\frac{1}{4}$ 年毎の地球の位置を点A，B，C，Dで示しました。点Aが遠日点で，点Cが近日点です。

図1



面積速度一定の法則によって，この4点と太陽を結ぶ線分は楕円の面積を4等分しますから，弧の長さは $\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD}<\overset{\frown}{DC}$ となります。

まず地軸の傾きがないものとして，この図で地球の向きがどのように変化していくかを考えます。地球が遠日点にあるときの，観測者から見た正午の太陽の方向を「正午の南」として固定します。地球は，公転の分を加えて1日に約361°自転するので，「正午の南」も1日に約1°ずつ動いて1年で360°回転します。図の矢印が点A，B，C，Dでの「正午の南」です。時間は1年を均等割りしたものですから，$\frac{1}{4}$ 年で「正午の南」は90°ずつ回転します。正午の太陽の位置は「正午の南」と比べて点Bでは西寄り，点Dでは東寄りにずれることになります。

これで正午の太陽の位置が季節によってずれることが定性的には分かりました。でも，これでは1年間のずれは1往復だけで，日時計の「8の字」の説明にはなりません。

地軸の傾きによるずれはどうなるのでしょうか。

§3. 地軸の傾きによるずれ

図2は，「斜め上」から見た，地球の軌道と地軸の傾きを図にしたものです。考えやすいように，今度は円軌道としました。

図 2

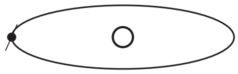


図 3 は，地球から見た太陽の動きです。地軸を「垂直」に立てました。

図 3

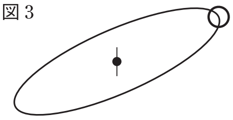
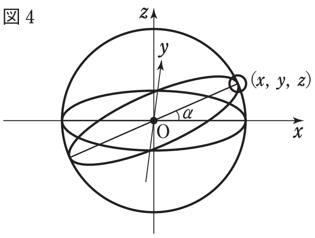


図 4 は，さらに地球を原点にして，直交座標に乗せた図です。

図 4



z 軸を地軸に一致させました。x 軸の正の方向を観測者の最初の正午の向きとします。y 軸は見づらいですが手前から奥へ延ばしています。α が地軸の傾きです。軌道の半径を 1 として，この図で毎正午の太陽の位置を考えます。

太陽の位置を $(x,\ y,\ z)$ とし，初期値を夏至の

$$(x,\ y,\ z)=(\cos\alpha,\ 0,\ \sin\alpha)$$

とします。太陽が 1 日に動く角度を t としますが，図の斜めの平面で回転させるのは難しいので，点 $(1,\ 0,\ 0)$ を z 軸を中心に t だけ回転させておいて，それを y 軸を中心に α だけ回転することにします。すなわち，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ Z=0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix},\ y=Y$$

として，

$$\begin{cases} x=\cos\alpha\cos t \\ y=\sin t \\ z=\sin\alpha\cos t \end{cases}$$

が 1 日後の正午の太陽の位置です。

この間に，観測者を乗せた地球も z 軸を中心に $2\pi+t$ だけ自転しています。でも，考えたいのは観測者から見た太陽の動きですから，地球と太陽を丸ごと t だけ戻してしまいます。すなわち，あらためて，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

とすると，正午の太陽の位置は，

$$\begin{cases} x=\cos\alpha\cos^2 t+\sin^2 t \\ y=(1-\cos\alpha)\sin t\cos t \\ z=\sin\alpha\cos t \end{cases}$$

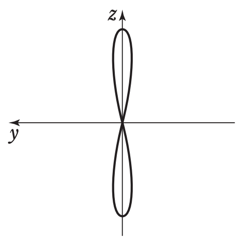
となります。

さらに，t を 1 日の角度に固定するのをやめて，1 年分の角度をとらせることにします。周期が見やすいように，式を変形すると，

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)-\dfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)\cos 2t \\ y=\dfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)\sin 2t \\ z=\sin\alpha\cos t \end{cases}$$

です。

この正午の太陽の位置を平面 $x=1$ に正射影して，グラフにしてみましょう。横着して t は連続量です。地球から見た太陽をイメージして，y 軸の向きは逆です。α も実際の値です。



「8 の字」が見えてきました。正午の太陽の位置は，上下の 1 回の動きに対して，左右に 2 回ずれています。しかし，夏至，秋分，冬至，春分 $\left(t=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$ では，正午の太陽がすべて z 軸上，すなわち真南にあります。ずれは起きていません。実際には，この 4 日間もずれは起こるようですから，楕円軌道によるずれと組み合わせる必要がありそうです。

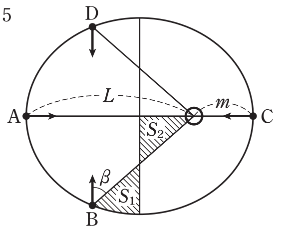
§4. 楕円軌道によるずれ(2)

楕円軌道によるずれを，もう少し定量的に考えてみましょう。

図 5 は **図 1** に書き足したものです。

太陽から遠日点 A までの距離を L，近日点 C までの距離を m として，長軸の長さを $2a$，短軸の長さを $2b$ とします。

図５



図の β が，ずれの最大値に近いと思われますが，β の値を正確に求めるのは簡単ではなさそうです。β は概算で求めることにします。

縦に引いた線は短軸で，楕円の面積を２等分します。したがって，図の S_1 と S_2 の面積が等しくなります。離心率が小さいので S_1 の部分の「扇形」を三角形とみなすと，簡単に β が求まります。楕円軌道の中心から太陽までの距離を f とすると，

$$b^2+f^2=a^2,\ L=a+f,\ m=a-f$$

より，

$$\tan\beta=\frac{2f}{b}=\frac{L-m}{\sqrt{Lm}}$$

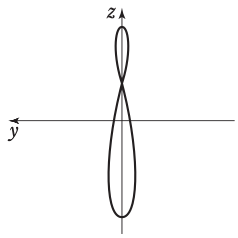
です。

この β をずれの最大値と仮定して，楕円軌道によるずれが「正弦曲線的」に変化するものとしてみましょう。すると，正午の太陽の位置の y 座標は，地軸の傾きによるずれと合わせて，

$$y=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)\sin 2t-\sin\beta\sin t$$

となります。

実際の L，m を使ってグラフにしてみます。



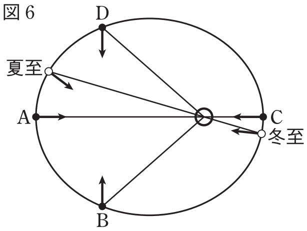
春分，秋分の日にもずれが起こりました。しかし，まだ夏至と冬至にはずれが起きていません。さらに修正が必要です。

§5. 夏至と冬至の位置による修正

§４は，遠日点が夏至，近日点が冬至であるとして計算しているので，そこを修正します。

図６は**図１**に，夏至と冬至を加えたものです。2016年の夏至は６月21日，遠日点通過は７月５日，冬至は12月21日，近日点通過は１月４日でした。太陽は，夏至では東寄りに，冬至では西寄りにずれていたはずです。

図６



修正すべき日数は，夏至，冬至ともに14日間です。年によってこの日数には変化があるようですが，だいたい２週間前後のようです。１年を52週として，t を $\frac{2}{52}\cdot 2\pi$ だけ修正します。太陽の y 座標

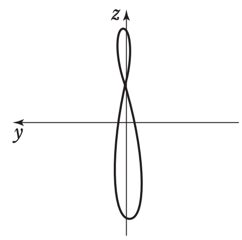
$$y=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)\sin 2t-\sin\beta\sin t$$

について，$t=0$ で夏至という部分は残して，楕円軌道によるずれの部分 $-\sin\beta\sin t$ を書きかえます。向きを考えて，

$$y=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)\sin 2t-\sin\beta\sin\left(t-\frac{\pi}{13}\right)$$

としてみましょう。

グラフをかいてみます。



ほんのわずかですが，夏至と冬至もずれました。エクセルでずれを計算してみると，±0.0079951…。$\sin^{-1}$ で角度にすると，ほぼ同じ，±0.0079952…。時間で約 ±1分50秒です。

以上で，正午の太陽の位置が１年を通じてどの様に変化するのかが，だいたい分かりました。

実際の南中時刻のずれを調べてみると，2015年の夏至で ＋1分52秒，冬至では －1分46秒でした。

「８の字」についても調べると，アナレンマと言うそうです。画像検索すると美しい写真をたくさん見ることが出来ます。

（東京都立調布南高等学校）