第3の座標軸を使う

～合成関数・媒介変数の関数・逆関数のグラフ的様態～

たかはし　としお
高橋　敏雄

§1. はじめに

関数 $\begin{cases} u=g(x) \\ y=f(u) \end{cases}$ の合成関数

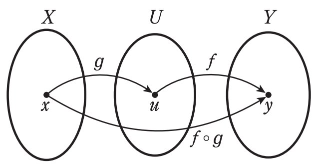
$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$ のグラフ，関数の媒介変数表示 $\begin{cases} x=g(t) \\ y=f(t) \end{cases}$ で表されるグラフの大半は，関数の式の中で解決をされている。この場合，これら関数の中で中間に位置する変数，例えば合成関数では u，媒介変数では t などが飛んでいて実体が見えないところにある。教科書ではそこのところの記述が見られない。関数的に理解できても，ビジュアル的に分からないので，多少すっきりしないのである。

常々，私は高等学校の数学は，なるべく具体的かつ視覚的説明であるべきである，と考えている。合成関数，曲線の媒介変数表示，逆関数に関するこれらの要求に，第3の座標軸を使って考えた。

§2. 合成関数

関数 $\begin{cases} u=g(x) \\ y=f(u) \end{cases}$ の合成関数

$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$ については，次のように図で説明される。

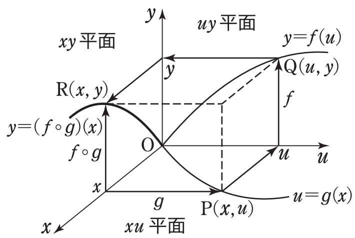


ここに出てくる3つの関数の関係がどうなっているのか，は問われていない。そこでこの3つの関数の関係を第3の u 軸を使って説明する。

x 軸と u 軸で作られた平面を xu 平面，

u 軸と y 軸で作られた平面を uy 平面，

y 軸と x 軸で作られた平面を xy 平面という。



したがって，関数 $u=g(x)$ のグラフは，xu 平面に描かれる。関数 $y=f(u)$ は，uy 平面に描かれる。

その結果，合成関数 $y=(f\circ g)(x)$ のグラフは xy 平面に描かれることになる。

例1　$y=f(u)=u^2+2$，$u=g(x)=x-1$ のとき，合成関数 $(f\circ g)(x)$ を求めよ。

$y=(f\circ g)(x)=f(u)=u^2+2=(x-1)^2+2$ 答

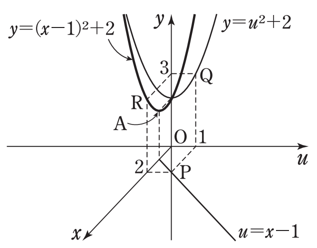
グラフは下図のようになる。

$y=(f\circ g)(x)=(x-1)^2+2$

x	-2	-1	0	1	2	3
u	-3	-2	-1	0	1	2
y	11	6	3	2	3	6

$u=x-1$ ：xu 平面
$y=u^2+2$ ：uy 平面
（以上で xy 平面）

$x=2$ のとき，$u=2-1=1$，$y=1^2+2=3$



点 P(2，1) は xu 平面に，点 Q(1，3) は uy 平面に，よって点 R(2，3) は xy 平面にある。点 A(1，2) は頂点になる。

グラフの流れは

$u=g(x)$ のグラフ $\to y=f(u)$ のグラフ
　　（xu 平面）　　　　（uy 平面）

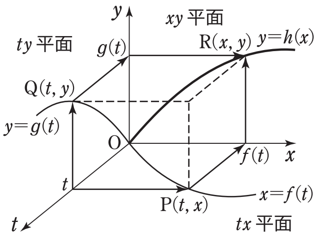
$\to y=(f\circ g)(x)$ のグラフ
　　　　（xy 平面）

である。

§3. 曲線の媒介変数表示

曲線 $C: y=h(x)$ が媒介変数表示 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ で表されるとき，この 3 つの曲線はどこにあるのか，§2. の場合と同じように，第 3 の t 軸を使って説明する。

さて，下図について，$x=f(t)$ のグラフは tx 平面にあり，$y=g(t)$ のグラフは ty 平面にある。その結果，曲線 $C: y=h(x)$ は xy 平面にあることになる。

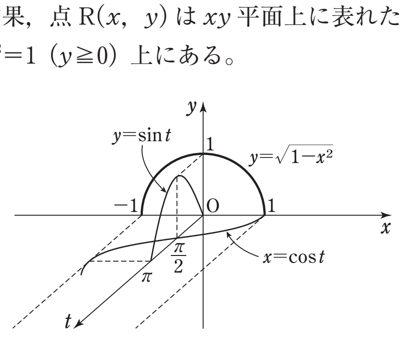


例 2　$x=\cos t$，$y=\sin t$ $(0\leqq t\leqq \pi)$

$x=\cos t$ のグラフは tx 平面に，$y=\sin t$ のグラフは ty 平面に表れる。

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π		
x	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	tx 平面	xy 平面
y	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	ty 平面	

その結果，点 R(x, y) は xy 平面上に表れた半円 $x^2+y^2=1$ $(y\geqq 0)$ 上にある。



グラフの流れは

$x=f(t)$ のグラフ ↘
　（tx 平面）　$y=h(x)$ のグラフ
$y=g(t)$ のグラフ ↗　　（xy 平面）
　（ty 平面）

〈追記〉関数 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ から t を消去して，$y=h(x)$ を求めるのが，困難な場合がある。

§4. 逆関数

関数 $y=f(x)$（f：全単射）が逆関数をもつとする。

$y=f(x)$ を x について解いた式が $x=g(y)$ とする。x と y を入れ替えて，$y=g(x)$ を得る。これが逆関数である。$g=f^{-1}$ で表す。

このとき，f，g の合成関数は，

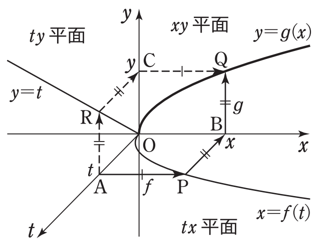
$$y=f(x),\ g(y)=x$$

より，$g(f(x))=g(y)=x$　となる。

これは，f，g の合成のグラフが常に直線 $y=x$ であることを示す。§3. を使う。すなわち，

$$y=g(x) \iff x=f(y) \iff \begin{cases} x=f(t) \\ y=t \end{cases}$$

$x=f(t)$ のグラフは，tx 平面にあり，その逆関数 $y=g(x)$ は xy 平面上にある。tx 平面と xy 平面は x 軸を折り目に折ると重なる。



$y=g(x)$ のグラフの描き方は，関数 $y=f(x)$ のグラフから，tx 平面に $x=f(t)$ のグラフを描き，ty 平面に直線 $y=t$ を描く。

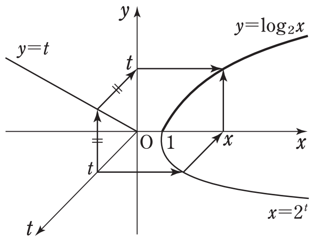
A → P → B → Q（$y=g(x)$ の x 座標）
A → R → C → Q（$y=g(x)$ の y 座標）

この結果，逆関数 $y=g(x)$ のグラフを描くことができるのである。

例 3　$y=f(x)=2^x$ の逆関数は $y=\log_2 x$ である。

t	-1	0	1	2	3	
$x=2^t$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	tx 平面
$y=t$	-1	0	1	2	3	ty 平面

$\left.\begin{array}{l} tx\text{ 平面} \\ ty\text{ 平面}\end{array}\right\} xy$ 平面



グラフの流れは,

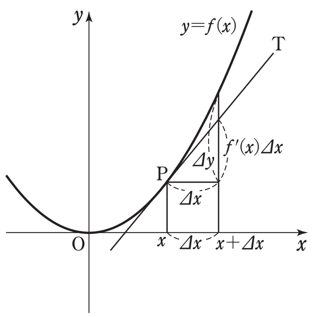
$y=f(x)$ の $\nearrow$ $x=f(t)$ のグラフ (tx 平面) $\searrow$ $y=g(x)$ の
グラフ $\searrow$ $y=t$ のグラフ (ty 平面) $\nearrow$ グラフ (xy 平面)

§5. 微分公式の図形的説明

(関数はすべて微分可能であるとする。)

下の図で直線 PT は曲線 $y=f(x)$ 上の点Pにおける接線である。

$y=f(x)$ において, x の増分 $\varDelta x$ に対する y の増分を $\varDelta y$ とする。$\varDelta x \fallingdotseq 0$ のとき, $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x} \fallingdotseq f'(x)$ より, $\varDelta y \fallingdotseq f'(x)\varDelta x$ である。



そこで, $\varDelta x \to 0$ とすると,

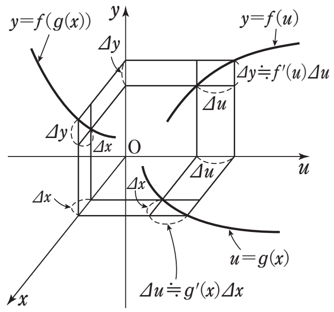
(i)　$\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x} \fallingdotseq f'(x) \to \dfrac{dy}{dx}=f'(x)$

(ii)　$\varDelta y=\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}\varDelta x \to dy=f'(x)dx$　となる。

1．合成関数の微分法

関数 $y=f(u)$, $u=g(x)$ の合成関数 $y=f(g(x))$ を考える。

$u=g(x)$ において, x の増分 $\varDelta x$ に対する u の増分を $\varDelta u$, $y=f(u)$ において, u の増分 $\varDelta u$ に対する y の増分を $\varDelta y$ とする。



上図において, $\varDelta x \fallingdotseq 0$ のとき,
$\varDelta u=g(x+\varDelta x)-g(x) \fallingdotseq 0$ である。
$\varDelta u \fallingdotseq g'(x)\varDelta x$ を $\varDelta y \fallingdotseq f'(u)\varDelta u$ に代入する。

$$\varDelta y \fallingdotseq f'(u)\varDelta u \fallingdotseq f'(u)g'(x)\varDelta x$$

よって, $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x} \fallingdotseq f'(u)g'(x)$

$\varDelta x \to 0$ のとき, $\varDelta u \to 0$ であるから,

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} \fallingdotseq f'(u)g'(x) \to \frac{dy}{dx}=f'(u)g'(x)$$

〈追記〉$\varDelta u=\dfrac{\varDelta u}{\varDelta x}\varDelta x$ を $\varDelta y=\dfrac{\varDelta y}{\varDelta u}\varDelta u$ に代入すると

$$\varDelta y=\frac{\varDelta y}{\varDelta u}\varDelta u=\frac{\varDelta y}{\varDelta u}\cdot\frac{\varDelta u}{\varDelta x}\varDelta x$$

よって　$\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{\varDelta y}{\varDelta u}\dfrac{\varDelta u}{\varDelta x}$

$\varDelta x \to 0$ のとき, $\varDelta u \to 0$ より,

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{\varDelta y}{\varDelta u}\frac{\varDelta u}{\varDelta x} \longrightarrow dy=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}dx$$

2．媒介変数で表された関数の微分法

x の関数 y が, t を媒介変数として $x=f(t)$, $y=g(t)$ で与えられているとき, **1.** と同様に $\dfrac{dy}{dx}$ を考える。

$\varDelta t \fallingdotseq 0$ のとき, $\varDelta x=f(t+\varDelta t)-f(t) \fallingdotseq 0$,
$\varDelta y=g(t+\varDelta t)-g(t) \fallingdotseq 0$ である。

$\varDelta x \fallingdotseq f'(t)\varDelta t$, $\varDelta y \fallingdotseq g'(t)\varDelta t$ より,

よって　$\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x} \fallingdotseq \dfrac{g'(t)\varDelta t}{f'(t)\varDelta t}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

$\Delta t \to 0$ のとき，$\Delta x \to 0$ であるから，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \fallingdotseq \frac{g'(t)}{f'(t)} \to \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

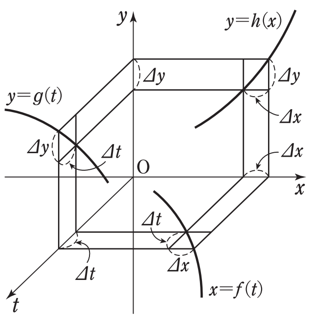
である。

〈追記〉$\Delta x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\Delta t$，$\Delta y = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}\Delta t$

よって，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\Delta t}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\Delta t} = \dfrac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}$ とすると，

$\Delta t \to 0$ のとき，$\Delta x \to 0$ より

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} \to \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$



3．逆関数の微分法

関数 $y=f(x)$ の逆関数を $y=g(x)$ とおき，

$\dfrac{dy}{dx}=g'(x)$ を求める。この場合，$y=g(x)$ を媒介変数表示で表される関数

$$y=g(x) \iff \begin{cases} x=f(t) \\ y=t \end{cases}$$

になおして微分する方法をとる。

$\Delta t \fallingdotseq 0$ とすると，$\Delta x = f(t+\Delta t)-f(t) \fallingdotseq 0$ である。

$\Delta x \fallingdotseq f'(t)\Delta t$,

$\Delta y = (t+\Delta t)-t = \Delta t$，$\Delta y \fallingdotseq g'(x)\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \fallingdotseq g'(x) \fallingdotseq \frac{\Delta t}{f'(t)\Delta t} = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{f'(y)}$$

$(\because \quad t=y)$

$\Delta t = \Delta y \to 0$ のとき，$\Delta x \to 0$ であるから，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \fallingdotseq g'(x) \fallingdotseq \frac{1}{f'(y)} \to \frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$$

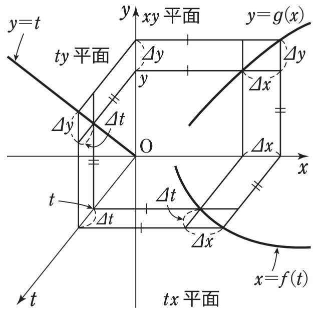
が示される。

〈追記〉$\Delta x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\Delta t$，$\Delta y = \Delta t$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta t}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\Delta t} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$\Delta t = \Delta y \to 0$ のとき，$\Delta x \to 0$ より，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} \to \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$



§6. 終わりに

数学Ⅲで扱われる合成関数の微分，媒介変数で表される関数の微分の証明は，すべて定義に従ってなされている。それでは，図形的にはどうなのかという疑問に答える解説書がない。この疑問に自分なりに納得のいく説明を追求したのが本稿である。第3の座標軸を考えることにより，理解が進むのではと思う。

そして，さらに進めて，積分法の

(i) 置換積分

$y=f(x)$，$x=g(t)$，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ とする。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

(ii) 媒介変数表示 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ が $y=h(x)$ で表されたとする。

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt$$

ただし，$f(\alpha)=a$，$g(\beta)=b$

(iii) 逆関数の積分

$$\int_a^b f^{-1}(x)\,dx = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(x)\,dx$$

なども，図形的に見ていくとどんな感じなのか，自学的に考えるヒントになると思う。先生方の参考になれば幸いです。

（元長崎県立大村工業高等学校）