

数学的帰納法の最初の授業

うすい たつや
白井 達哉

§1. はじめに

現在一般的に行われている指導の問題点を2つ挙げます。第1は帰納法の原理を天下一的^{てんかいつてき}に与えることです。多少の導入はあるかもしれませんが、最初に整理された形で帰納法の原理を生徒に教えます。

ここでなるほどと思うのはかなり数学が得意な生徒でしょう。多くの生徒はまず「 $n=k$ のときに成り立つと仮定すると $n=k+1$ のときも成り立つ」の意味が分からず、次に実際に問題を解く場面ではどうすればよいか分からず、形式的に問題が解けても証明できた気分になれません。数学的帰納法は自然数が無限にあるという事実^{じじつ}に初めて本格的に向き合うのですから難しく感じるのは当然です。

第2は多くの教科書で等式の証明を最初に扱うことです。手元にあるいくつかの教科書を見ると、最初の例題は次のように等式の証明です。

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

これらは帰納法を用いて証明できる等式としては確かに簡単なものですが、等式の証明そのものが最初の素材としては難しいと思います。その理由は $n=k$ のときの仮定から $n=k+1$ のときに証明する過程で形式的な文字式の計算が避けられないことです。帰納法の感覚的理解を計算が邪魔します。

過去の指導経験から、数学的帰納法の原理を感覚的に分かっている生徒は結構多いと思います。それなのに教科書に述べられた数学的帰納法の原理が納得できないのは、生徒が感覚的に分かっている帰納法と、教科書にある形式化された帰納法の間^{あひだ}に大きなギャップがあり、2つがうまく結びつかないからだと思います。当然ながら感覚的にすら帰納法が分かっている生徒にいきなり形式的な帰納法を教え

ても理解できるはずはありません。そのような生徒にはまず感覚的な理解が必要です。

§2. 指導の概略

多くの教科書では漸化式の後で帰納法を学びますから、次の漸化式による数列を用います。

$$\begin{cases} a_1=11 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ a_{k+1}=a_k+2k \quad (k=1, 2, 3, \cdots) & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

漸化式による数列の定義の解説は次の通りです。

[1] $n=1$ のとき①により a_n が定まる。

[2] $n=k$ のときの a_n の値が定まるならば②より $n=k+1$ のときの a_n の値が定まる。

[1], [2]よりすべての自然数 n について a_n が定まる。

これは数学的帰納法そのものです。ここでは帰納法と同じ自然数の性質すなわちペアノの第5公理を用いています。帰納法の導入に漸化式を使うのは自然なことだと思います。

この数列は素数に注目すると初項から $a_{10}=101$ まではすべて素数であり $a_{11}=121=11^2$ で初めて合成数になります。一方すべての項が奇数になります。この2つの事実が導入に大変都合がよいのです。

さらにこの数列が優れているのは次の点です。漸化式②が単純なため、これを見ているだけで「奇数に偶数を加えれば常に奇数になるから、ある項が奇数ならば次の項も常に奇数になる」という帰納法の核心部分が形式的計算なしで分かります。

数学的帰納法の原理を最初から与えるのではなく、この例を用いて数学的帰納法の形式を導き出すという方法を用います。まず最初はこの例を細かく検討して自然数全体に関するある性質、すなわち数学的帰納法の原理に生徒自身が気づくようにします。こ

こでの理解は感覚的なものですからこれを言葉によって表現します。次の言葉による表現に数学記号を加えながら表現を少しずつ形式化し、最終的に現在用いられている帰納法の形式を導きます。

生徒の反応を見る限り、この方法によると「帰納法によって確かに証明ができたと思える」という実感を持ちやすいと思います。実際に帰納法を用いて証明ができるようになるためには、これとは別に技術的な訓練が必要です。

§3. 感覚的帰納法の理解

実際の指導では、まず上の漸化式で与えられた数列の初項から第8項までを求めます。

11, 13, 17, 23, 31, 41, 53, 67

その後、『初項から第8項までを見て、それらの数に共通する性質がありませんか。』と聞くと、次の2つの性質に気が付く生徒がいます。

1. すべて素数である
2. すべて奇数である

まず素数を取り上げ、『第9項以降も、この数列の項はどこまでも素数が続くと思いますか。それともどこかで素数でない項が現れると思いますか。』と問います。

これに対して、生徒の意見は2つに分かれます。

その後の細かい進め方はいろいろ工夫の余地がありますが、最終的に

$$a_9=83, a_{10}=101, a_{11}=121=11^2$$

を示して、ずっと素数が続くという予想がはずれることを示します。ここで分かったことを「初めの方のいくつかの項が素数だからといって、すべての項が素数であるとは言えない。」という形で述べます。これは「最初の方のいくつかの自然数について、あることが成り立つからといって、すべての自然数に対してそのことが成り立つとは結論できない。」という良い例になります。

ここで話を奇数に移します。『確かに a_{11} は素数ではありません。でもまだ初項からここまではすべて奇数ですね。では第11項以後もすべての項が奇数となるでしょうか。それとも素数と同じようにどこかでだめになるでしょうか。』と問いかけると、ここでもやはり生徒の意見は2つに分かれます。

すべての項が奇数であると考えた生徒に『たとえ第10000項まで実際に計算してみてもすべての項が奇

数だったとしても、もっと先でだめになるかもしれないと反論できます。どこまで計算してみても、自然数は無数にあるから、どこまでも反論できます。』という、自信がなくなる生徒もいますが、自信が崩れない生徒もいます。その生徒に『どうして全部奇数だと思うの?』と聞くと、『だって奇数に偶数を加えれば奇数になるでしょ。』と言います。

このように言う生徒は数学的帰納法が感覚的に分かっています。分からない生徒もいますから、①、②からすべての項が奇数であると判断する理由を詳しく説明します。

まず、②から分かることについて詳しく説明します。

- ・無条件で「 a_{k+1} が奇数である」とはいえない
- ・ a_k が偶数ならば a_{k+1} も偶数になってしまう
- ・「 a_{k+1} が奇数である」といえるためには

「 a_k が奇数である」という仮定が必要であるこれらの内容をここでは形式的な計算ではなく言葉で説明します。

最終的に次のように数学記号を用いない表現でまとめます。

「ある項が奇数であると仮定すると、②からその次の項も奇数になることが分かる。」

これが納得できれば数学的帰納法の最も困難な部分の感覚的な理解はできたと思います。

これを納得したら次に、①と②の2つからすべての項が奇数であると結論できる理由を説明します。ここではどの教科書にも書いてある次の内容を説明するだけです。

まず②で $k=1$ とすると、 $a_2=a_1+2$ となり、①から a_1 は奇数であることが分かるから、 a_2 も奇数であることが分かります。

a_2 は奇数であることが分かったから、②で $k=2$ とすると、 $a_3=a_2+2$ となるから a_3 も奇数であることが分かります。

この論理を100回繰り返せば、 a_{101} が奇数であることが分かり、10000回繰り返せば、 a_{10001} が奇数であることが分かります。同じ論理は何回でも繰り返すことができますから、どの項も奇数であることが分かります。項は無数個ありますが無数個のものが奇数であることが一瞬にして分かります。

§4. 感覚的帰納法の形式化

ここまでに分かった内容を文章で表します。

- (1)
- | |
|---|
| <p>[1] ①から初項が奇数であることが分かる。
 [2] ある項が奇数であるならば、②からその次の項も奇数であることが分かる。
 [1], [2]からすべての項が奇数であることが分かる。</p> |
|---|

これが納得できた生徒は数学的帰納法が感覚的に分かっているといつてよいでしょう。ここから、生徒が理解した内容をいろいろな問題で使えるようにするために、表現を変えていきます。

「～が奇数である」という表現が何度も出てきます。その主語である「～」の部分は、「すべての項」であったり「ある項」であったりします。「ある項」は a_n で表されます。そこで「～が奇数である」を「 a_n が奇数である」という表現を用い、これを(A)とおきます。

すると次のように言い換えることができます。

- 「初項が奇数である」
 →「 $n=1$ のとき(A)が成り立つ」
 「ある項が奇数である」
 →「ある自然数 n について(A)が成り立つ」
 「その次の項が奇数である」
 →「その次の自然数 n について(A)が成り立つ」
 「すべての項が奇数である」
 →「すべての自然数 n について(A)が成り立つ」
 また意味を強調するために、「ならば」→「と仮定すると」と言い換えます。
 すると(1)は次のように表されます。

- (2)
- | |
|---|
| <p>[1] $n=1$ のとき①から(A)が成り立つ。
 [2] nがある自然数のとき(A)が成り立つと仮定すると、②からnがその次の自然数のときも(A)が成り立つ。
 [1], [2]からすべての自然数nについて(A)が成り立つ。</p> |
|---|

最後に“ある自然数”を k で表せば、“その次の自然数”は $k+1$ と表されます。

すると(2)は次のような表現になります。

- (3)
- | |
|---|
| <p>[1] $n=1$ のとき①より(A)が成り立つ。
 [2] $n=k$ のとき(A)が成り立つと仮定すると、②から$n=k+1$ のときも(A)が成り立つ。
 [1], [2]からすべての自然数nについて(A)が成り立つ。</p> |
|---|

これで最終的な表現が得られました。①、②を見ながら(3)が納得できれば、帰納法の原理は理解できたと言ってよいと思います。途中で一般的な表現の意味が分からなくなったら、常に具体的な①、②に戻って説明します。

要点だけ述べましたが、細かい部分ではいつもの授業で行っているように手を替え品を替えの説明が必要です。ここでは2回の表現の書き直しを行いました。もっと細かいステップに分けた方が良いでしょう。

[2]はどの教科書でも

「 $n=k$ のときに(A)が成り立つと仮定すると $n=k+1$ のときも(A)が成り立つことを示す。」と述べてありますが、指導する側としては「『 $n=k$ のときに(A)が成り立つと仮定すると $n=k+1$ のときも(A)が成り立つ』がすべての自然数 k について成り立つことを示す。」であることを意識しなければならないと思います。漸化式の($k=1, 2, 3, \dots$)の部分です。

§5. 例題の解説

導入で用いた例を問題として取り上げます。

問題 次の式で定義される数列はすべての項が奇数であることを証明せよ。

$$\begin{cases} a_1=11 & \dots\dots① \\ a_{n+1}=a_n+2n & (n=1, 2, 3, \dots\dots) \dots\dots② \end{cases}$$

証明 「 a_n が奇数である。」……(A) とおく。

- [1] ①より $n=1$ のとき(A)が成り立つ。
 [2] $n=k$ のとき(A)が成り立つ、すなわちある整数 m を用いて $a_k=2m+1$ と表されると仮定すると、②より、
 $a_{k+1}=a_k+2k=2m+1+2k=2(m+k)+1$
 ここで $m+k$ は整数であるから、 a_{k+1} は奇数である。
 すなわち $n=k+1$ のときも(A)は成り立つ。

[1], [2]より, すべての自然数 n について(A)が成り立つ。すなわちすべての項は奇数である。

[証明終わり]

②から分かることを導入では言葉によって表現しましたが, ここでは式を用いて表現します。すでに感覚的に分かっている内容ですから, 式で表現しても抵抗感は少ないでしょう。ここでは言葉で表された条件を数式で表現することの重要性を強調します。

これ以後教科書の問題を扱っていきます。教科書を普通に扱う場合と比較すると1時間ほど余分に時間がかかりますが, 問題なく指導できると思います。また後日, 応用問題として漸化式を扱う場合の混乱がある程度未然に防げると思います。

§6. おわりに

$a_1=41$ とすると a_1 から a_{40} まですべて素数になります。3桁以上の自然数は素数の判定が大変ですが, 素数表を使えば「帰納的な予測はずれることがある」という事実をもっと劇的に示すことができるかもしれません。

この数列は私が教員になって数年後に偶然どこかで見つけたものです。これは帰納法に使えると思いました。そこでは一般項 $a_n=n^2-n+11$ で与えられていました。しかし帰納法との相性を考え, またこの形では a_{11} が素数でないことが分かってしまうこともあり, 漸化式による表現にしました。それ以後いろいろな導入例を見てきましたが, 「数学的帰納法が腑に落ちる」という点ではこの数列が優れていると思います。

(岐阜県立長良高等学校)