連立３元１次方程式からの逃げ

岡部　洋輔

§1. はじめに

――「３元１次が嫌いだ。」

３点を通る放物線または円の方程式を求める問題においては，連立３元１次方程式を解くのが普通である。しかし，これがなかなか煩わしい。たまたま２文字一気に消去できる問題ならまだ良いが，一般には，２式から１文字消去し，それと異なる組の２式から１文字消去し，できた２式から１文字をまた消去。これでやっと１文字について解けて，それだけでも既に肩で息をしているというのに，ここからまた代入か。もううんざりである。

そこで，これらの問題それぞれにおいて，連立３元１次方程式を避ける方法を以下のとおり提案する。

§2. ３点を通る放物線の方程式

３点を通る２次関数の決定問題の特別な場合として，２点がx軸上にあれば簡単に解けるのは言うまでもない。例えば，３点$(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(4,\ 6)$を通る２次関数を求める場合，x軸上にある２点を通る２次関数の一般式 $y=a(x-1)(x-3)$ の形を作り，残った１点を代入してaを求める方法だ。これはスマートである。一般の問題でもこのように，２点を通る２次関数を一般式で表し，残り１点の代入で済ませる方法がないか，と考えた。

例題　３点$(-1,\ 3)$，$(2,\ 6)$，$(3,\ 19)$を通る放物線の方程式を求めよ。

２点$(-1,\ 3)$，$(2,\ 6)$を通る２次関数の一般式を求めることを考える。まず，それぞれ同じx座標の値をx軸上でとる２点$(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$を通る放物線の方程式は

$y=a(x+1)(x-2)$　……①

と表せる。ところで，２点$(-1,\ 3)$，$(2,\ 6)$を通る直線の方程式は

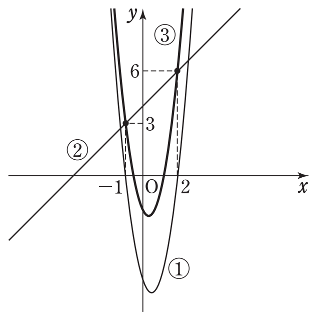
$y=x+4$　……②

である。（②式は２点を座標平面にさっとかいて，傾き１とy切片４をすばやく見出して求めたい。）

ここで，①式と②式の右辺を足した

$y=a(x+1)(x-2)+x+4$　……③

について考えると，③式も２次式であるから，もちろん放物線の方程式である。そして，$x=-1$ のとき，および $x=2$ のときのyの値を考えれば，①式ではどちらも $y=0$，②式ではそれぞれ $y=3$，$y=6$ なのだから，当然③式でも $y=3$，$y=6$ である。すなわち，③式は２点$(-1,\ 3)$，$(2,\ 6)$を通る２次関数の一般式である。



したがって③式に最後の１点$(3,\ 19)$を代入することにより，aの値を求めればよい。

$19=a\times4\times1+3+4$ より　$a=3$

これを③式に代入して整理することにより，

$y=3x^2-2x-2$　…(答) を得る。

以上の解法をまとめると，

Ⅰ	３点のうち，２点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$を通る直線の方程式 $y=px+q$ を求める。
Ⅱ	$y=a(x-x_1)(x-x_2)+px+q$ に最後の１点$(x_3,\ y_3)$を代入し，aの値を求める。
Ⅲ	Ⅱの式にaの値を代入して式を整理する。

となる。なお，２点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$の選び方は，Ⅰの直線の方程式が求めやすい組，または最後の式

整理が楽なように $x_1=-x_2$ を満たす組が望ましい。

§3. 3点を通る円の方程式

3点を通る円の方程式を求める問題も放物線のときと同様の解き方を考えてみた。すなわち，2点を通る円の方程式を一般化して，それに最後の1点を代入するものである。

例題 3点 $(-1,\ 3)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 6)$ を通る円の方程式を求めよ。

まず，2点 $(-1,\ 3)$，$(1,\ 1)$ を通る円の特別な場合として，この2点を直径の両端とする円を考える。このとき，次の事実を用いるとよい。

> 2点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ $(x_1 \neq x_2$ または $y_1 \neq y_2)$ を直径の両端とする円の方程式は，
> $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$
> である。

この事実はベクトルの内積を用いて簡単に証明できるが，ここでは省略する。これにより，2点 $(-1,\ 3)$，$(1,\ 1)$ を直径の両端とする円の方程式は，

$(x+1)(x-1)+(y-3)(y-1)=0$ ……①

になる。(①の左辺を $f_1(x,\ y)$ とする。) ところで，同2点を通る直線の方程式は，

$y=-x+2$ すなわち，$x+y-2=0$ ……②

である。(②の左辺を $f_2(x,\ y)$ とする。) ここで，方程式 $f_1(x,\ y)+af_2(x,\ y)=0$ ……③ を考える。この式は，左辺を展開したときに x^2 と y^2 の係数がともに1で xy の項がないため，円の方程式になり得る。さらに a の値にかかわらず

$f_1(-1,\ 3)+af_2(-1,\ 3)=0$,

$f_1(1,\ 1)+af_2(1,\ 1)=0$

が成り立つから，③式すなわち

$(x+1)(x-1)+(y-3)(y-1)+a(x+y-2)=0$

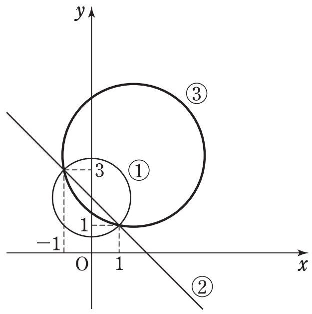
は2点 $(-1,\ 3)$，$(1,\ 1)$ を通る円の一般式である。

残りの1点 $(2,\ 6)$ を代入し，

$3\cdot 1+3\cdot 5+a(2+6-2)=0$ より $a=-3$

これを③に代入して整理し，

$x^2+y^2-3x-7y+8=0$ …(答) を得る。



以上の解法をまとめると，

> Ⅰ 3点のうち，2点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式 $px+qy+r=0$ を求める。
> Ⅱ $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)$
> $+a(px+qy+r)=0$
> に最後の1点 $(x_3,\ y_3)$ を代入し，a の値を求める。
> Ⅲ Ⅱの式に a の値を代入して式を整理する。

となる。なお，前述の解説の中で2点を通る円の「一般式」という言葉を用いた。そう呼ぶには，正確にはⅡの式が a の値にかかわらずに円になる ($x_1 \neq x_2$ または $y_1 \neq y_2$ であり，かつ直線 $px+qy+r=0$ が2点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通ることが条件) ことを示すべきであろうが，ここでは省略した。

§4. センター試験過去問より

平成25年のセンター試験 (数学Ⅰ・A/本試験) では前述の解法が有効な問題が出題されていた。該当部分を抜き出すとおよそ次のような問題になる。

> 座標平面上にある点Pは，点A$(-8,\ 8)$から出発して，直線 $y=-x$ 上を，x 座標が1秒あたり2増加するように一定の速さで動く。また，同じ座標平面上にある点Qは，点PがAを出発すると同時に原点Oから出発して，直線 $y=10x$ 上を x 座標が1秒あたり1増加するように一定の速さで動く。出発してから t 秒後 $(0<t<4)$ の2点P，Qを考える。3点O，P，Qを通る2次関数のグラフが関数 $y=2x^2$ のグラフを平行移動したものになるような t の値を求めよ。また，そのときどのように平行移動すればよいか。

一般的な解法は，t 秒後の 2 点 $\mathrm{P}(2t-8,\ -2t+8)$，$\mathrm{Q}(t,\ 10t)$，および原点 $(0,\ 0)$ を $y=2x^2+bx+c$ に代入して，b，c を消去し，t を求める方法と思われる。しかし，直線 OP が $y=-x$ とわかっているのだから，点 P の y 座標は実は不要で，いきなり，

$y=2x\{x-(2t-8)\}-x$　……①

とおくことができる。これに $\mathrm{Q}(t,\ 10t)$ だけを代入する。$t \fallingdotseq 0$ に注意すると，

$10t=2t\{t-(2t-8)\}-t$

$10=2(-t+8)-1$

より，$t=\dfrac{5}{2}$ を得る。最後に平行移動の幅を調べるには頂点の座標を求めればよい。なおこのとき，t の値を①に代入してから，展開して平方完成する方法もあるが，次のように t 代入後に $2x$ でくくり，x 軸との共有点の x 座標の値から求める方法もある。

$y=2x(x+3)-x=2x\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$

x 軸との共有点の x 座標は 0，$-\dfrac{5}{2}$ であるから軸はその中央の値 $x=-\dfrac{5}{4}$ であり，軸から x の値が $\dfrac{5}{4}$ 増加するときに y の値が $2\times\left(\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{25}{8}$ 増加するから，頂点の座標は $\left(-\dfrac{5}{4},\ -\dfrac{25}{8}\right)$ である。言葉にすると面倒そうに見えるが，実際放物線のイメージをかいてみて求めるとこっちの方がやや早いのではないかと考える。答えは「x 軸方向に $-\dfrac{5}{4}$，y 軸方向に $-\dfrac{25}{8}$ 平行移動する」となる。

§5. おわりに

以上，連立 3 元 1 次方程式を避ける方法を取り上げたが，それぞれ実用性のあるものと思われるので，活用していただけたら幸いである。

ちなみに，3 点を通る円の方程式を求める問題を，10 問ほど時間を計って 2 通りの方法で解いてみた。結果，今回紹介した方法でかかった時間は連立 3 元 1 次方程式を用いる方法の 4 分の 3 であった。「効果覿面」と表現していいかはわからないが，確実に効率化は図れると言っていいのではないだろうか。

（北海道文教大学明清高等学校）