シュートのベストポジションの軌跡
～生徒の関心をひく軌跡と作図の問題として～

西元（にしもと）　教善（のりよし）

§1. はじめに

サッカーの試合でプレーヤーがシュートをするときのベストポジションを平面上で考える。ただし，シュートをするときのベストポジションとは，ゴールの両端 A，B とプレーヤーの位置Pを結んでできる ∠APB が最大のときと定義する。

さて，コーナーキックを受けてシュートをするとき，コーナーフラッグと現在位置を結ぶ直線上しか動かないプレーヤーがいるとすると，シュートのためのベストポジションはどこになるであろうか。

§2. 状況説明

プレーヤーPは，コーナーキックからボールを受けるとパスをしないでシュートする。また，P はコーナーフラッグと現在位置 P_0 を結ぶ直線上しか動かないという特異なプレーヤーである。(図１)

相手ゴールの右端を A，左端をBとするとき ∠APB が最大になる位置を，コーナーキックを受けるベストポジションと定義する。

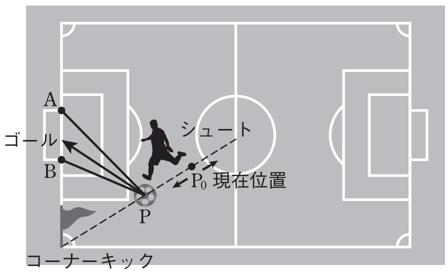

図１

§3. 座標の設定

次に座標軸と座標の設定を行う。図２のようにおく。つまり，下側のタッチラインを x 軸 (相手ゴールから自陣ゴールに向かう方向を正の向きとする)，相手側のゴールラインを y 軸，コーナーキックをするコーナーフラッグの地点を原点Oとする。

$a>b>0$ として，A$(0,\ a)$，B$(0,\ b)$ とおく。また，$x>0$，$y>0$ として，P$(x,\ y)$ とおく。

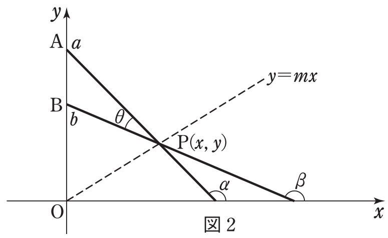

図２

また，直線 OP の傾きを $m(>0)$ とする。
さらに，直線 AP，BP と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ，α，β $\left(\dfrac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\pi\right)$ とする。また，
$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とする。
このとき，直線 OP の方程式は $y=mx$ であり，
$\theta=\beta-\alpha$ である。

§4. ∠APB が最大となるPの位置

$$\tan\alpha=\frac{a-y}{0-x}=\frac{mx-a}{x}$$
$$\tan\beta=\frac{b-y}{0-x}=\frac{mx-b}{x}$$
……① である。

加法定理から，

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\quad\cdots\cdots②$$

①を②に代入して，

$$\tan\theta=\frac{\dfrac{mx-b}{x}-\dfrac{mx-a}{x}}{1+\dfrac{mx-b}{x}\cdot\dfrac{mx-a}{x}}$$
$$=\frac{x(mx-b)-x(mx-a)}{x^2+(mx-b)(mx-a)}$$
$$=\frac{(a-b)x}{(m^2+1)x^2-(a+b)mx+ab}$$
$$=\frac{a-b}{(m^2+1)x-(a+b)m+\dfrac{ab}{x}}$$

ここで，分母の中にある $(m^2+1)x+\dfrac{ab}{x}$ について考える。

$a>0$，$b>0$，$x>0$ より $(m^2+1)x>0$，$\dfrac{ab}{x}>0$ であるから，相加・相乗平均の関係により，

$$\frac{(m^2+1)x+\dfrac{ab}{x}}{2}\geqq\sqrt{(m^2+1)x\cdot\frac{ab}{x}}=\sqrt{ab(m^2+1)}$$

よって，$(m^2+1)x+\dfrac{ab}{x}\geqq2\sqrt{ab(m^2+1)}$ ……③

なお，等号は $(m^2+1)x=\dfrac{ab}{x}$ のとき，つまり $(m^2+1)x^2=ab$ のときに成り立つ。

$x>0$ であるから，$x=\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}$ のときに成り立つ。

次に，③の両辺から $(a+b)m$ を引いて

$$(m^2+1)x-(a+b)m+\frac{ab}{x}\geqq2\sqrt{ab(m^2+1)}-(a+b)m$$

である。

ここで，$2\sqrt{ab(m^2+1)}-(a+b)m=0$ である m を求める。

$2\sqrt{ab(m^2+1)}=(a+b)m$ の両辺を 2 乗して

$$4ab(m^2+1)=(a+b)^2m^2$$

よって　$\{(a+b)^2-4ab\}m^2=4ab$

つまり　$(a-b)^2m^2=4ab$

$a>b>0$，$m>0$ であるから　$m=\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}$

(i)　$0<m<\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}$ のときは，$(a-b)^2m^2<4ab$

よって　$(a-b)^2m^2+4abm^2<4ab+4abm^2$

つまり　$(a+b)^2m^2<4ab(m^2+1)$ である。

両辺とも正であるから

$$\sqrt{(a+b)^2m^2}<\sqrt{4ab(m^2+1)}$$

$a>0$，$b>0$，$m>0$ より

$$(a+b)m<2\sqrt{ab(m^2+1)}$$

よって　$2\sqrt{ab(m^2+1)}-(a+b)m>0$ である。

(ii)　$m=\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}$ のときは，当然のことであるが

$2\sqrt{ab(m^2+1)}-(a+b)m=0$ である。

(iii)　$m>\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}$ のときは，

$2\sqrt{ab(m^2+1)}-(a+b)m<0$ である。

したがって，(i)のとき $a-b>0$ ($\because a>b>0$) であることから

$$\frac{a-b}{(m^2+1)x-(a+b)m+\dfrac{ab}{x}}\leqq\frac{a-b}{2\sqrt{ab(m^2+1)}-(a+b)m}$$

つまり $\tan\theta\leqq\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab(m^2+1)}-(a+b)m}$ であり

$x=\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}$ $\left(このとき，y=m\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}\right)$

のとき，$\tan\theta$ は最大になる。

$\tan\theta$ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ では単調増加であるから，

$x=\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}$ $\left(このとき，y=m\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}\right)$

のとき，$\theta=\angle\mathrm{APB}$ は最大になる。

(ii)のとき

$$(m^2+1)x-(a+b)m+\frac{ab}{x}\geqq2\sqrt{ab(m^2+1)}-(a+b)m=0$$

このとき，
$$x=\sqrt{\frac{ab}{m^2+1}}=\sqrt{\frac{ab}{\left(\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)^2+1}}=\sqrt{\frac{ab}{\dfrac{4ab+(a-b)^2}{(a-b)^2}}}=\sqrt{\frac{ab}{\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}}}=\sqrt{\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2}}=\frac{\sqrt{ab}(a-b)}{a+b}\quad(\because a>b>0)$$

であるから，

$x=\dfrac{\sqrt{ab}(a-b)}{a+b}$ のとき $\tan\theta=\infty$ つまり $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

となる。

(iii)のとき $(m^2+1)x-(a+b)m+\dfrac{ab}{x}(x>0)$ が連続関数であることから，$x=\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}$ に十分近い範囲では

$$2\sqrt{ab(m^2+1)}-(a+b)m\leqq(m^2+1)x-(a+b)m+\frac{ab}{x}<0$$

であるから，この範囲において

$$\frac{a-b}{(m^2+1)x-(a+b)m+\dfrac{ab}{x}}\leqq\frac{a-b}{2\sqrt{ab(m^2+1)}-(a+b)m}<0$$

よって，

$x=\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}$ $\left(このとき，y=m\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}\right)$

のとき，$\tan\theta$ は最大になる。

$\tan\theta$ は $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ では単調増加であるから,

$$x=\sqrt{\frac{ab}{m^2+1}}\ \left(このとき,\ y=m\sqrt{\frac{ab}{m^2+1}}\right)$$

のとき, $\theta=\angle\mathrm{APB}$ は最大になる。
したがって, ベストポジションは

$$点\left(\sqrt{\frac{ab}{m^2+1}},\ m\sqrt{\frac{ab}{m^2+1}}\right)\ (m>0)$$

ということになる。

§5. ベストポジションの軌跡

§4.より, ベストポジションは点

$\left(\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}},\ m\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}\right)$ $(m>0)$ である。

すると, m をこの範囲で動かすと**ベストポジションの軌跡**が求められることになる。

$x=\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}$, $y=m\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}$ とおき, m を消去する。

$x=\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}$ より $x^2=\dfrac{ab}{m^2+1}$ よって,

$m^2+1=\dfrac{ab}{x^2}$ つまり $m^2=\dfrac{ab}{x^2}-1$ ……①

$y=mx$ より $y^2=m^2x^2$ ……②

①を②に代入して $y^2=\left(\dfrac{ab}{x^2}-1\right)x^2=ab-x^2$

よって $x^2+y^2=ab$

以上から, ベストポジションの軌跡の方程式は

$$x^2+y^2=ab\ (x>0,\ y>0)$$

つまり, 原点Oを中心とする半径が $\sqrt{ab}$ である円の第1象限にある部分である。

§6. ベストポジションの軌跡の作図

次に, ベストポジションの軌跡を作図することを考えてみる。つまり, 原点Oを中心とする半径が $\sqrt{ab}$ である円の第1象限にある部分を作図する。
$x^2+y^2=ab$ $(x>0,\ y>0)$ であるから, 軌跡である弧の端点 (軌跡としては含まれない) の座標は
$(0,\ \sqrt{ab})$, $(\sqrt{ab},\ 0)$ である。
ここで, $\mathrm{C}(0,\ \sqrt{ab})$, $\mathrm{D}(\sqrt{ab},\ 0)$ とする。

なお, 直線 OP_0 : $y=mx$ 上でのベストポジションは点 $\left(\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}},\ m\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}\right)$ であるが, これを

$\mathrm{P}_m\left(\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}},\ m\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}\right)$ と表すと

$m\to\infty$ のとき $\mathrm{P}_m\to\mathrm{C}$, $m\to+0$ のとき $\mathrm{P}_m\to\mathrm{D}$

実際, $\left(\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}},\ m\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}\right)$

$$=\left(\sqrt{\frac{ab}{m^2+1}},\ \sqrt{\frac{ab}{1+\left(\frac{1}{m}\right)^2}}\right)$$

$\to(0,\ \sqrt{ab})$ $(m\to\infty$ のとき)

$\left(\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}},\ m\sqrt{\dfrac{ab}{m^2+1}}\right)$

$\to(\sqrt{ab},\ 0)$ $(m\to+0$ のとき)

である。

次に, これを作図の問題として考察するが, 要は原点を中心とする半径 $\sqrt{ab}$ の円がかければよいのである。長さ a, b が与えられたとき, $\sqrt{ab}$ を作図するには,「方べきの定理」を応用すればよい。

まず, $a+b$ を作図し, $a+b$ を直径の大きさとする円をかく。

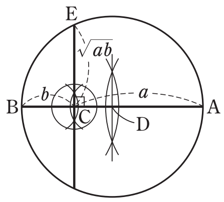

図3

そのためには図3のように, A, C, B が一直線上にあり, AC$=a$, BC$=b$ のとき, 線分 AB の垂直二等分線をかき, 次に, その交点をDとして, Dを中心として半径が AD である円をかく。そして, C を通って AB に垂直な直線を引き, その交点の1つをEとすれば CE$=\sqrt{ab}$ である。

これは, 方べきの定理を作図に活用する代表的な例である。

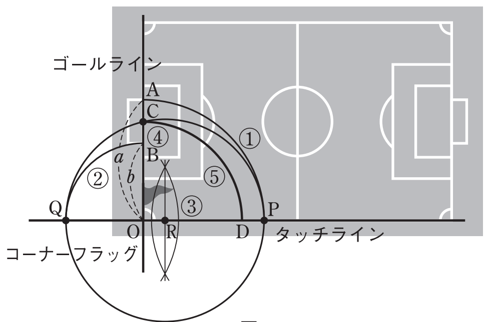

図4

では, 作図の手順を示そう。

① O（コーナーフラッグのある位置）を中心とし，半径が a である円をかき，タッチラインとの交点をPとする。座標では $\mathrm{P}(a,\ 0)$

② O（コーナーフラッグのある位置）を中心とし，半径が b である円をかき，タッチラインの（平左への）延長との交点をQとする。座標では $\mathrm{Q}(-b,\ 0)$

③ 線分PQの垂直二等分線をかき，タッチラインとの交点をRとすると，Rは線分PQの中点である。座標では $\mathrm{R}\left(\dfrac{a-b}{2},\ 0\right)$

④ 線分PQを直径とする円（Rを中心として半径がPRである円）をかき，ゴールラインとの交点をCとする。座標では $\mathrm{C}(0,\ \sqrt{ab})$

⑤ O（コーナーフラッグのある位置）を中心とし，半径が $\sqrt{ab}=\mathrm{OC}$ である円をかき，タッチラインとの交点をDとして，弧CDをかく。
ベストポジションの軌跡は弧CD（ただし，2点C，Dは除く）である。

§7. まとめ

実際のサッカーの試合では，フィールド内には大勢のプレーヤーがいて，コーナーキックの際に現在位置とコーナーフラッグを結ぶ直線上だけを走ることはできないこともある。また，角度のない位置からでもコースを曲げてゴールできるプレーヤーもいるが，本稿ではゴールの両端（平面上で考えた場合）とプレーヤーとの作る角が最大になる位置をベストポジションとして，その位置や軌跡を求めた。

不自然といえばそれまでであるが，そのような状況下でも題材が「サッカー」であれば興味を持つ生徒が多いのではないかと思う。生徒の興味・関心を抱かせる題材として考えて頂ければ幸いである。

（山口県立岩国高等学校）