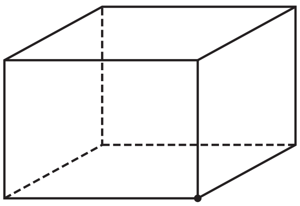
n 角柱・n 角錐・正多面体の最短往復数について

濱田　和哉

§1. はじめに

昨年の夏休みにある公務員試験の問題を見ていたところ，次のような問題があった。

> 立方体（四角柱）のある頂点に点Ｐがある。点Ｐはその頂点から出発し，四角柱の 12 本の辺上をすべて，少なくとも１回以上通り，もとの頂点に戻ってくるものとする。点Ｐが最短で戻るときの辺の数を求めよ。
>
> 
>
>
> （注：問題文は著作権に配慮して，表現と図を変えて記載します。）

公務員試験では答は公表されているが，解法までは公表されていない。そこで最初は鉛筆で辺を辿りながら数える方法で解いてみた。すると線が重なって数え難い。そこでもっと上手に間違いなく数える方法はないかと考えた。線の上の経路だけを考えるのであれば，何も立体にしなくてもよいのである。そこでトポロジー的手法で立体のグラフを考えることにした。

§2. 最短往復数の定義

ある点がある立体の頂点から出発して，すべての辺を少なくとも１回以上通り，もとの点に戻るとき，点が通る辺の数を**最短往復数**という。

§3. グラフで辺を数える方法

トポロジー的手法とは問題の立体を平面につぶして考えることである。このような図を位相図あるいはグラフという。図形は上下左右対称なので，点Ｐはどこにとってもよい。ただ私が試行錯誤した結果，図１のように中の四角形の頂点にとる方が計算し易いようである。

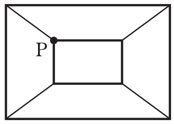


図１

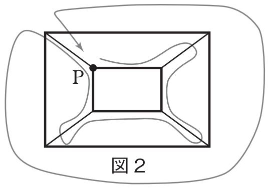


図２

図２のようにグラフの点Ｐから出発して，最初は内側から外側へと向かい，向きを変えまた内側へ向かい，ジグザグ状に中の四角形を１周して外側に出る。外側の四角形を１回りして最後に元の点に戻るという数え方が一番分かり易い。答えは 16 個となる。さらにこの問題を拡張するために三角柱と五角柱についても同様の手法で試みた。三角柱のグラフは図３のようになる。

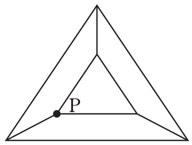


図３

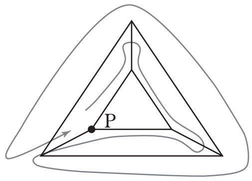


図４

図４で内側から外側へジグザグに数えることで 12 個となる。五角柱の場合，グラフは図５になる。図６のように花弁の形に数えることで 20 個であることが分かる。

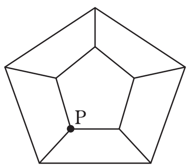


図５

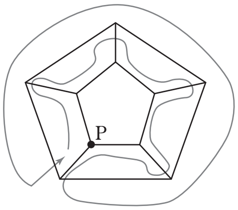


図６

ただ，このように辺を辿る方法では，最短であることが不明確である。そこで別の方法を考える。

§4. グラフを一筆書きに変形する方法

一筆書きとは，ある図形を筆記具で，平面から一度も離さずにしかも，同じ辺を二度通らずに（点で交差するのはかまわない）図形を描くことである。あるグラフが一筆書き可能な条件は，頂点に集まる辺の数（その点の**次数**という）で判断することができる。あるグラフが一筆書き可能である条件は次の①，②のうち，どちらか一方が成り立てばよい。

> ①　すべての頂点の次数が偶数
> ②　次数が奇数である頂点（**奇点**という）の数が 2 で，他の頂点の次数はすべて偶数

①のグラフを**オイラーグラフ**と呼ぶ。

図 1 において，すべての頂点の次数は 3 で奇数次数の点が 8 個存在する。したがって，このグラフは一筆書きが不可能である。そこで条件①より，すべての頂点の次数が偶数になるように，しかも**できるだけ少ない本数**の辺を追加するのである。図 1 では図 7 のように内側の四角形と外側の四角形を結ぶ辺にそれぞれ辺を 1 本ずつ追加すればよい。

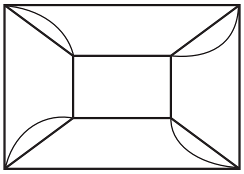


図 7

上記のことから三角柱では 3 本，四角柱では 4 本，五角柱では 5 本，……，n 角柱では n 本追加すればよいことが分かる。以上のことからこの最短往復数に法則はないかと考えて，次の表を作成した。

n 角柱	3	4	5	……	n
辺の数	9	12	15	……	$3n$
追加する最小の辺の数	3	4	5	……	n
最短往復数	12	16	20	……	$4n$

したがって次の定理 1 が得られた。

> **定理 1**
> **n 角柱の最短往復数を a_n とすると　$a_n=4n$**

§5. n 角錐の最短往復数

次に，n 角錐についても同様にグラフを用いて調べてみた。

三角錐のグラフは図 8 のようになる。4 つの頂点の次数は 3 なので，すべての点の次数を 4 にしたい。そのためには，図 9 のように辺を 2 本追加するとよい。したがって，三角錐の最短往復数は 8 となる。

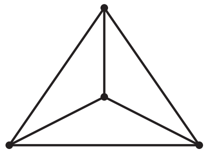


図 8

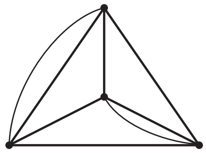


図 9

また，四角錐のグラフは図 10 のようになる。外側の 4 つの頂点の次数は 3 なので，すべての点の次数を 4 にしたい。そのためには，図 11 のように辺を 2 本追加するとよい。したがって，四角錐の最短往復数は 10 となる。

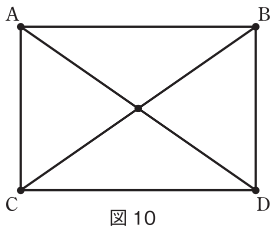


図 10

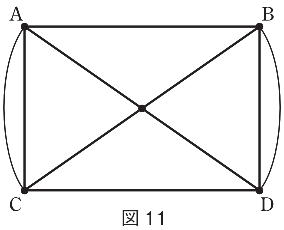


図 11

三角錐と四角錐から，追加する辺の数は 2 と思うが，五角錐は 3，七角錐は 4 となり一定ではないことに気づく。やはりグラフを描いて地道に調べるしかない。十二角錐まで調べて，次の結果を得た。

n 角錐	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
辺の数	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
追加する最小の辺の数	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
最短往復数	8	10	13	15	18	20	23	25	28	30

この表から n 角錐の最短往復数は階差数列になることが分かった。

最短往復数　8　10　13　15　18　20　23　25　28
第 1 階差　2　3　2　3　2　3　2　3
第 2 階差　1　−1　1　−1　1

したがって，次の定理 2 が得られた。

> **定理 2**
> **n 角錐の最短往復数（$n \geqq 3$）の最短往復数を a_n**
> **とすると　$a_n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{2}n-\dfrac{1}{4}(-1)^n$**

§6. 正多面体の最短往復数

正多面体についても最短往復数を調べた。

正多面体	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
最短往復数	8	16	12	40	36

正四面体の最短往復数は，三角錐と同じ 8 で，正六面体の最短往復数は，四角柱と同じ 16 である。次に正八面体の最短往復数は図 12 のグラフからすべての頂点が偶数次数なので一筆書き可能である。よって，12 となる。正十二面体は図 13 から 40 で，正二十面体は図 14 から 36 であることが分かった。

今回の研究を通して，多面体の最短往復数には未知の性質が存在することが分かりました。

正八面体のグラフ

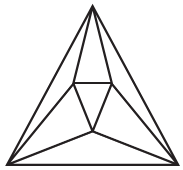


図 12

正十二面体のグラフ

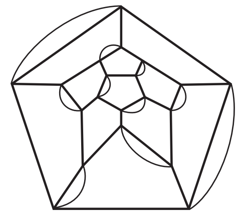


図 13

正二十面体のグラフ

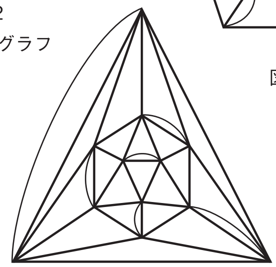


図 14

《参考文献》

〔1〕 警察官（Ⅲ類）教養試験問題
平成 24 年 1 月 15 日（日）実施　問題 No.40

（鹿児島県立出水高等学校）