

大学入試問題を活用した中高連携の実践

～数学的な見方・考え方を育むために～

やまもと たかゆき やまがみ たつろう
山本 貴之 山上 達郎

§1. はじめに

新潟市立高志中等教育学校は、開校8年目の公立中高一貫校である。1年生から4年生の数学科授業は、1クラス2名で行っており、1年生の授業では、中学籍と高校籍の教員が毎時間連携して、中高の接続を意識した学習活動を展開している。

本稿では、中高一貫校の利点を生かして、6年生が1年生の教室に赴いて授業に参画した実践について報告する。1年生が解いた問題を、6年生が別の解法を紹介するという活動を展開した。1年生に対しては「数学的な見方・考え方のよさ」を感得させることを、6年生に対しては「今までの学習の成果」と「プレゼンテーションの力」を発揮することをねらいとした活動である。この授業では、我々教員の予想を超えた学びが生徒たちに見られた。

§2. 1年生と6年生が取り組んだ課題

1年生と6年生と一緒に取り組める課題として、以下に挙げる東京大学の入試問題を準備した。

2辺の長さが1と2の長方形と1辺の長さが2の正方形の2種類のタイルがある。縦2、横 n の長方形の部屋をこれらのタイルで過不足なく敷き詰めることを考える。そのような並べ方の総数を A_n で表す。ただし n は正の整数である。たとえば、 $A_1=1$ 、 $A_2=3$ 、 $A_3=5$ である。このとき、以下の問いに答えよ。

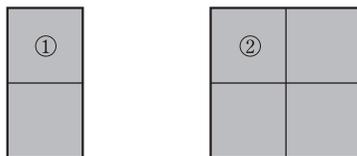
- (1) $n \geq 3$ のとき、 A_n を A_{n-1} 、 A_{n-2} を用いて表せ。
- (2) A_n を n で表せ。(東大理科 1995 前期 ③)

この入試問題を原文のまま1年生に提示することは困難である。しかし、具体的に示して A_5 を考えさせることは可能である。また、1年生は組み合わせを考えて解き、6年生は漸化式を用いることから、

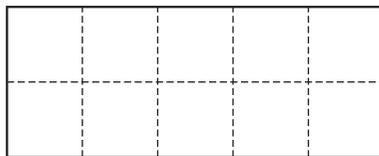
「数学的な見方・考え方のよさ」を感得させるというねらいにも合致すると考えた。

1年生への課題提示は、細水保宏氏らの提案を参考にし、以下のように行った。(参考文献〔1〕)

長方形のタイル①と、①を2枚つなげた大きさの正方形のタイル②がたくさんあります。



これらのタイルを使って、下の壁にタイルをぴったりとしきつめるはり方は何通りありますか。



10月下旬、1年生の授業を行っている中学籍と高校籍の教員が、1年生と6年生に課題提示を行った。そして、この課題を解いた6年生2名が1年生の教室に赴くという形で、11月上旬に本実践が行われた。

§3. 授業の実際

授業の前半は、まず1年生の生徒から、 A_5 の場合についてどのように解いたかが発表された。

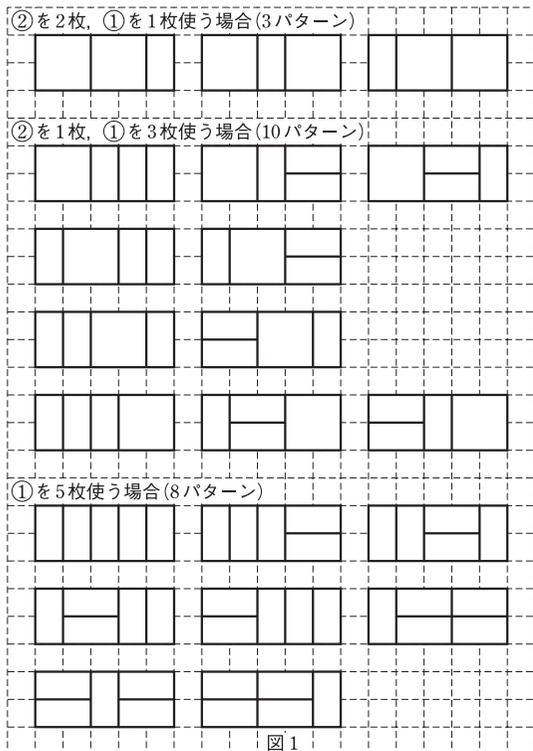
まず、樹形図の考え方をういた生徒から、左からタイルを埋めていく方法が発表された。

次に、組み合わせの考え方をういた生徒が、黒板にタイルを貼りながら、次の発表をした(図1)。

「まず、②が2枚のとき、①が1枚必要です。この組み合わせは、全部で3パターンあります。次に、②が1枚のとき、①は3枚必要になります。この組み

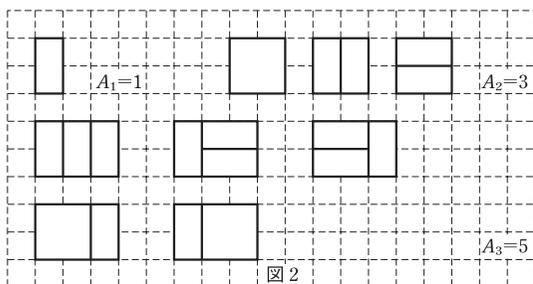
合わせは、②のタイルをずらしながら考えると、10パターンあることがわかります。最後に、②を使わずに、①だけが5枚の組み合わせを考えます。これは全部で8パターンありました。つまり、以上のことから、 $3+10+8=21$ 通りだと考えました。」

この発表は、多くの生徒の賛同を得た。そして、何れの方法でも $A_5=21$ であることが確認された。

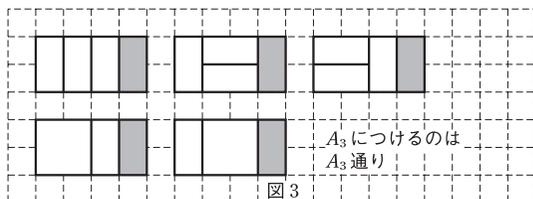


次に、6年生が漸化式を用いた解き方を発表した。(6年生の2名に対しては、1年生の学習内容を踏まえられるように事前指導を行った。)

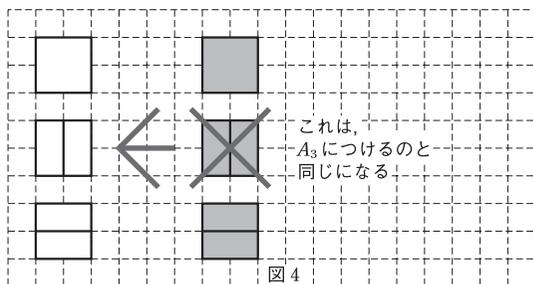
「まず、 A_1 、 A_2 、 A_3 を考えます。今、1年生のみなさんが考えてくれたように、全ての場合を調べてみると、問題にも書いてありますが、 $A_1=1$ 、 $A_2=3$ 、 $A_3=5$ であることがわかります(図2)。」



「ここから、私たちは、 A_4 を工夫して求めます。まず A_4 は横の長さが4なので、さっきやった横の長さが3の A_3 の右端に①のタイルを1枚つける方法が考えられます。これは全部で5通り考えられます(図3)。」



「次に、 A_2 の右端にタイルを並べる方法を考えます。 A_2 の右側にタイルを並べる方法は、さっきの図から3通りあることがわかります。しかし、①を縦に2枚並べるものは、 A_3 の右側に①のタイルを1枚つける場合と同じであることがわかります(図4)。」



「つまり、 A_2 の右端にタイルを並べる方法は、 A_2 の3通りに対して、2通りずつ考えればよいので、 3×2 で6通り考えればよいことがわかります。したがって、『 $A_4=A_3 \times 1 + A_2 \times 2$ より、 $A_4=5 \times 1 + 3 \times 2=11$ (通り)』となることがわかります。ここまでは、大丈夫ですか?」

ここまで1年生は、問いかげに頷く場面が多く、概ね理解できていたようである。ところが、この後6年生が「 $A_n=A_{n-1}+A_{n-2} \times 2$ 」という式を書くと、1年生の一部が首をかじげた。見慣れない式がすぐに解釈できなかつたようである。しかし、「この式だとよくわからないかも知れないけど、例えば、最初にやった A_3 であれば、 $A_3=A_2+A_1 \times 2$ ということになり、最初の(図2)をあてはめて計算すれば、 $A_3=A_2+A_1 \times 2=3+1 \times 2=5$ になることがわかります。」という6年生の説明により、1年生は納得した表情になった。6年生の説明は、2人で役割を分担しながら10分の時間を要したものの、「1つ前と

2つ前がわかれば求められる」という考え方を、1年生に伝えることができたといえよう。

この後の説明は省略するが、6年生は漸化式から、一般項を求める計算を簡潔に披露して、

$$A_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^{n-2}}{3}$$

という一般項を紹介した。6年生が「 n に2や3を代入してみてください」と声をかけて、1年生は A_2 、 A_3 などを計算で求めた。1年生にとって、指数に文字を代入する経験がなかったこと、 $(-1)^0$ の計算を学習していなかったことから、想定よりも時間がかかった。しかし、1年生が $n=5$ を代入して $A_5=21$ を求めることができたときは、歓声があがった。1年生にとって、パズルのような問題の答えが数式で表せることに、大きな驚きを感じたようである。

§4. 生徒の感想

この授業の最後に、1年生が書いた感想を以下に掲載する。数学的な見方・考え方のよさについて感得した様子を読み取れるものであった。

- ・ 樹形図や組み合わせの方法と違い、計算で A_n の式(一般項)を求めていますすごいと思った。
- ・ 数個の例だけで、他のどのパターンも説明できるようにするというのは、さすが6年生だなあと思いました。 A_n の式で最後に答えがピタリと出たときは、「おお!」と思いました。
- ・ 1年生の組み合わせの解き方も良かったが、6年生の解き方は、まったく教えていないところがすごいと思った。

また、6年生が教室に来て授業に参加してくれたことは、1年生にとっても大きな励みとなった。

- ・ 6年生の解き方は、中学の内容が土台になっていると感じたのでがんばろうと思った。
- ・ 中等でしかできないことであり、6年生が教えてくれることはよい経験となりました。
- ・ 一番嬉しかったことは、大学入試問題に触れることができたことです。後期課程になると、こんなすごい解き方があるんだなあと思い、早くこうなりたいと思いました。
- ・ 5年後に私も、こんな数学が解けるようになって、他の人に説明できるようになりたい。

更に、6年生からは以下のような感想が得られた。

数学を習い始めたばかりの1年生に、大学入試レベルの問題を正確かつわかりやすく伝えることはとても難しかったです。しかし、1年生でも理解できるように試行錯誤することで、自分の中の知識を整理し直すことができ、非常によい経験になりました。

機械的に数学をこなすのではなく、思考過程を重視することの楽しさが伝わっていたら嬉しいです。

§5. 成果と課題

今回の授業は、1年生を担当する2人の教員の息が合って実践することができた。中学生にどこまで指導することが可能か、高校の学習に入る前にどこまで経験をさせておくべきかについて、日頃から検討していた成果といえよう。

前述の生徒の感想からもわかるように、1年生と6年生の交流は、両者にとって想像以上の効果があった。1年生にとって、漸化式のよさを感じることができたこと、大学入試レベルの学習を経験できたことは大きな財産であった。また、6年生にとってもこれまでの学習を振り返るよい機会となった。感想の中にも述べられているが、知識を整理したり、思考過程を重視したりする活動を通して、自身の数学観をより深めていたといえよう。さらに、6年生が1年生の感想を嬉しそうに読む姿も印象的であった。入試問題の解き方を解説することが、自己有用感の高揚につながったといえよう。

今後は、数学的な見方・考え方を育む活動を、通常の学習の中に取り入れていきたいと考えている。今回は、トピック的な扱いの授業であったが、中学籍の教員と高校籍の教員が協同して、よりよい学習活動を構想していきたい。今回、1年生が漸化式をこれだけ理解できたということは、学習過程を工夫すれば6年生の力を借りなくても見いだせるという示唆が得られた。生徒にとって能動的な活動となるように改善を図っていきたい。

《参考文献》

[1] 「小学生でも解ける 東大京大入試問題」

東洋館出版社

(新潟県 新潟市立高志中等教育学校)